

# Apunts d'Òptica Física

Artur Carnicer i Ignasi Juvells  
Universitat de Barcelona  
Departament de Física Aplicada i Òptica

8 de gener de 2003

# Índex

<b>1</b>	<b>Òptica Geomètrica</b>	<b>5</b>
1.1	Òptica Geomètrica Paraxial . . . . .	5
1.1.1	Postulats de l'Òptica Geomètrica . . . . .	5
1.1.2	Principi de Fermat . . . . .	5
1.1.3	Conceptes. Conveni de signes . . . . .	6
1.1.4	Invariant d'Abbe . . . . .	8
1.1.5	Augments. Plans focals i principals . . . . .	8
1.1.6	Llei de les lents . . . . .	9
1.1.7	Sistemes compostos . . . . .	10
1.1.8	Lents . . . . .	11
1.1.9	Formació d'imatges en una lent . . . . .	11
1.1.10	Formació d'imatges en un mirall esfèric . . . . .	11
1.1.11	Limitacions de llum i camp en sistemes òptics . . . . .	11
1.2	Instruments de projecció . . . . .	16
1.2.1	Introducció als instruments de projecció . . . . .	16
1.2.2	L'ull humà . . . . .	16
1.2.3	La càmera fotogràfica . . . . .	17
1.2.4	Objectius fotogràfics . . . . .	18
1.2.5	Sistemes d'il·luminació de projectors . . . . .	19
1.3	Telescopis . . . . .	20
1.3.1	Introducció . . . . .	20
1.3.2	Ullera astronòmica . . . . .	21
1.3.3	Ullera de Galileu . . . . .	21
1.3.4	Ullera terrestre . . . . .	22
1.3.5	Telescopis de miralls . . . . .	24
1.4	Microscopis . . . . .	24
1.4.1	La lupa. L'objectiu del microscopi . . . . .	24
1.4.2	El microscopi compost . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Òptica Electromagnètica</b>	<b>27</b>
2.1	Ones electromagnètiques . . . . .	27
2.1.1	Equacions de Maxwell . . . . .	27
2.1.2	L'equació d'ones. Solucions . . . . .	28
2.1.3	Energia. Vector de Poynting . . . . .	30
2.2	Polarització . . . . .	32

2.2.1	L'el·lipse de polarització . . . . .	32
2.2.2	Polarització: casos particulars . . . . .	33
2.2.3	Polaritzadors . . . . .	33
2.3	Propagació, reflexió i refracció . . . . .	35
2.3.1	Deducció de les lleis de l'Òptica Geomètrica . . . . .	35
2.3.2	Fórmules de Fresnel . . . . .	36
2.3.3	Anàlisi dels coeficients de transmissió i reflexió . . . . .	38
2.3.4	Factors de transmissió i reflexió en intensitat . . . . .	40
2.3.5	Estudi de la reflexió total . . . . .	41
2.4	Òptica de medis conductors . . . . .	43
2.4.1	Propagació en medis conductors . . . . .	43
2.5	Òptica de medis anisòtrops . . . . .	45
2.5.1	Nomenclatura . . . . .	45
2.5.2	Equacions de Maxwell. Solucions . . . . .	46
2.5.3	Medis uniaxials . . . . .	48
2.5.4	Làmines retardadores . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Interferències</b> . . . . .	<b>53</b>
3.1	Coherència . . . . .	53
3.1.1	Coherència temporal i monocromaticitat . . . . .	53
3.1.2	Condicions per obtenir imatges d'interferència estables . . . . .	54
3.2	Experiment de Young . . . . .	56
3.2.1	Descripció de l'experiment . . . . .	56
3.2.2	Dispositius per obtenir franges de Young . . . . .	58
3.2.3	Coherència espacial . . . . .	58
3.3	Dispositius interferomètrics . . . . .	59
3.3.1	Interferències en làmines dielèctriques . . . . .	59
3.3.2	Làmines antireflectores . . . . .	62
3.3.3	L'interferòmetre de Fabry-Perot . . . . .	65
3.3.4	Filtres interferencials . . . . .	67
3.3.5	Interferòmetres de Michelson i de Mach-Zehnder . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Difracció</b> . . . . .	<b>71</b>
4.1	Teoria escalar . . . . .	71
4.1.1	Introducció a la teoria escalar de la difracció . . . . .	71
4.1.2	Ones escalars. El teorema de Green . . . . .	71
4.1.3	Teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff . . . . .	73
4.1.4	Aplicació del teorema de Helmholtz-Kirchhoff a la difracció . . . . .	73
4.2	Aproximació de Fresnel . . . . .	76
4.2.1	Introducció a l'aproximació de Fresnel . . . . .	76
4.2.2	Aproximació de Fresnel . . . . .	76
4.2.3	Difracció a distància llunyana . . . . .	77
4.3	Aproximació de Fraunhofer . . . . .	78
4.3.1	Ona plana a través d'un objecte rectangular . . . . .	78
4.3.2	Ona plana a través d'una obertura circular . . . . .	78

4.3.3 Ona plana a través d'una estructura periòdica unidimensional . . . . . 80



# Capítol 1

## Òptica Geomètrica

### 1.1 Òptica Geomètrica Paraxial

#### 1.1.1 Postulats de l'Òptica Geomètrica

Definim l'índex de refracció d'un medi com el quocient  $n = c/v$ , on  $c$  és la velocitat de la llum en el buit i  $v$  és la velocitat de la llum en el medi. Els cinc postulats de l'Òptica Geomètrica són:

1. Les trajectòries en els medis homogenis i isòtrops són rectilínies.
2. Sigui una superfície que separa dos medis d'índexs  $n$  i  $n'$ . El raig incident, el reflectit, el transmès o refractat i la normal a la superfície en el punt d'incidència estan en el mateix pla (pla d'incidència).
3. Siguin  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$  i  $\epsilon''$  els angles que formen el raig incident, el refractat i el reflectit amb la normal, respectivament. El raig incident i el refractat verifiquen la llei de Snell:  $n \sin(\epsilon) = n' \sin(\epsilon')$ .
4. El raig incident i el reflectit verifiquen la llei de la reflexió:  $\epsilon = \epsilon''$ .
5. Les trajectòries de la llum a través de diferents medis són reversibles.

#### 1.1.2 Principi de Fermat

Sigui un medi homogeni i isòtrop d'índex  $n$ . La llum viatja entre els punts A i B, seguint una trajectòria rectilínia. Definim el *camí òptic*  $\Delta_{AB}$  com el producte entre l'índex de refracció i la distància  $s$  que recorre la llum entre els dos punts  $\Delta_{AB} = ns_{AB}$ . Si la llum travessa diferents medis, el camí òptic serà

$$\Delta = \sum n_i s_i. \quad (1.1)$$

Si el medi és heterogeni i l'índex de refracció canvia punt a punt, la definició de camí òptic esdevé una integral de camí

$$\Delta = \int_c n ds. \quad (1.2)$$

El principi de Fermat diu que per anar de A a B, la llum segueix un camí òptic extremal (és a dir, màxim o mínim):

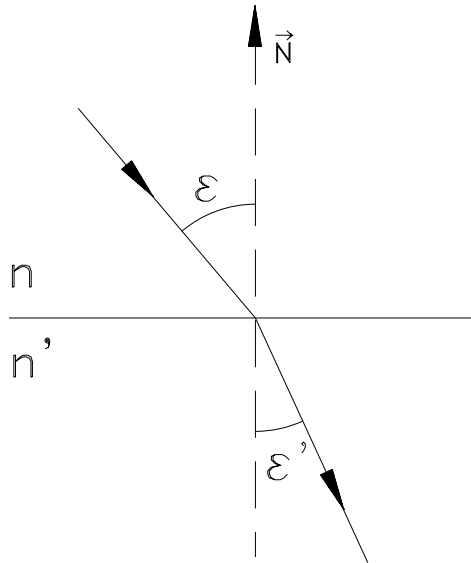


Figura 1.1: Llei de Snell

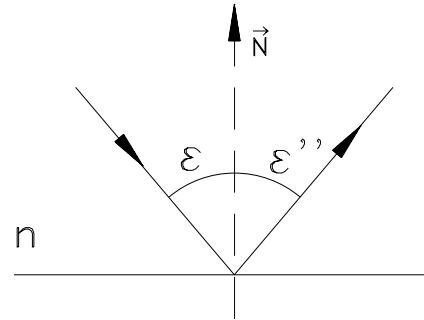


Figura 1.2: Llei de la reflexió

$$\delta\Delta = \delta \int_c n ds = 0. \quad (1.3)$$

### Teorema de Malus-Dupin

Si sobre cada raig que surt d'un focus emissor de llum prenem camins òptics iguals, els punts que limiten aquests camins generen una superfície que és normal a tots els raigs. Aquesta superfície s'anomena *front d'ona*.

### 1.1.3 Conceptes. Conveni de signes

#### Sistema òptic

Anomenem *sistema òptic* a un conjunt de superfícies que separen medis amb índexs de refracció diferents. Si les superfícies són de revolució, i els seus centres estan alineats, la recta que els uneix s'anomena *eix òptic*. El punt emissor d'on surten els raigs s'anomena *objecte*; el punt on s'ajunten els raigs un cop passat el sistema òptic és la *imatge*. Si els raigs passen físicament per un punt, s'anomena *real*. El punt és *virtual* si hi arriben o surten les perllongacions dels raigs. El conjunt de punts objecte forma l'*espai objecte* mentre que el conjunt de punts imatge conforma l'*espai imatge*.

#### Sistema òptic perfecte

Un sistema òptic és perfecte si es pot establir una relació de semblança entre tot l'espai objecte i tot l'espai imatge. Es pot demostrar que aquesta condició no és físicament viable. Podem determinar unes noves condicions menys restrictives (condicions de Maxwell):

1. A un pla normal a l'eix òptic a l'espai objecte li correspon un pla normal a l'eix òptic a l'espai imatge.

2. Tots els raigs que entren al sistema sortint d'un punt passen a la sortida per un altre punt (real o virtual).
3. Tota figura continguda en un pla perpendicular a l'eix es representa amb una figura semblant continguda també en un pla perpendicular a l'eix a l'espai imatge.

**Definició de condició d'estigmatisme:** un sistema es comporta estigmàticament entre dos punts quan tots els raigs que surten d'un punt objecte van a parar a l'altre punt.

**Conveni de signes**

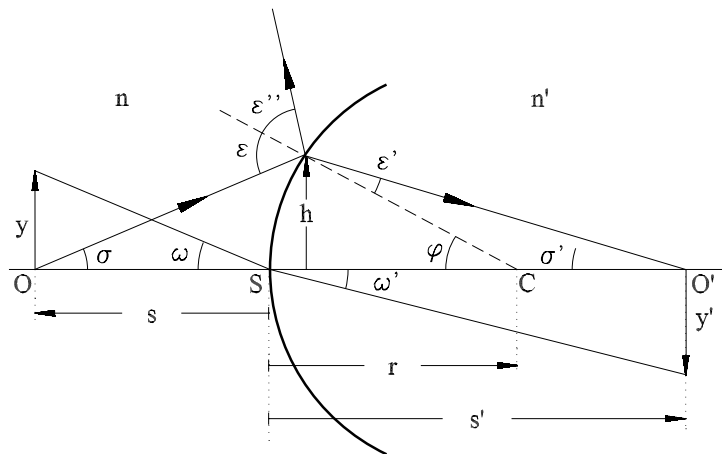


Figura 1.3: Conveni de signes. Variables geomètriques

		Valor positiu	Valor negatiu
Distàncies al llarg de l'eix	$s, s'$	Dreta de la superfície	Esquerra de la superfície
Radis de curvatura	$r$	Centre de la superfície a la dreta	Centre de la superfície a l'esquerra
Distàncies normals a l'eix	$y, y', h$	Sobre l'eix òptic	Sota l'eix òptic
Angles d'incidència, refracció i reflexió	$\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \omega, \omega'$	Sentit horari (girant cap a la normal)	Sentit antihorari (girant cap a la normal)
Angles amb l'eix	$\sigma, \sigma', \varphi$	Sentit antihorari (girant cap a l'eix òptic)	Sentit horari (girant cap a l'eix òptic)

Taula 1.1: Conveni de signes. Norma europea

**Òptica paraxial. Definició**

Moltes de les situacions que s'estudien en l'Òptica Geomètrica presenten la particularitat que els angles amb els quals es treballa són petits. Quan es treballa en aquestes condicions es parla d'Òptica de primer grau o bé Òptica Paraxial. En aquests casos, l'aproximació del sinus o la tangent de l'angle pel seu arc és vàlida:  $\sin(\epsilon) \approx \epsilon$ ,  $\tan(\epsilon) \approx \epsilon$ . En aquestes condicions, la llei de la refracció s'escriu  $n\epsilon = n'\epsilon'$ .



### 1.1.4 Invariant d'Abbe

L'*invariant d'Abbe* dona la posició de la imatge a partir de la posició d'un punt objecte (emissor) quan es produeix una refracció a través d'una superfície esfèrica de radi  $r$  que separa dos medis d'índexs  $n$  i  $n'$ . Les distàncies de l'objecte a la superfície i d'aquesta superfície a la imatge són  $s$  i  $s'$ , respectivament. La fórmula de l'invariant d'Abbe indica que qualsevol parell de punts objecte-imatge verifiquen la relació d'estigmatisme. Aquesta relació és vàlida en condicions paraxials.

$$n \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = n' \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right). \quad (1.4)$$

Aquesta fórmula es pot aplicar repetidament per diverses superfícies fent servir la fórmula de pas:

$$s_{i+1} = s'_i - d_{i,i+1}, \quad (1.5)$$

que relaciona la distància imatge i la distància objecte de superfícies consecutives.

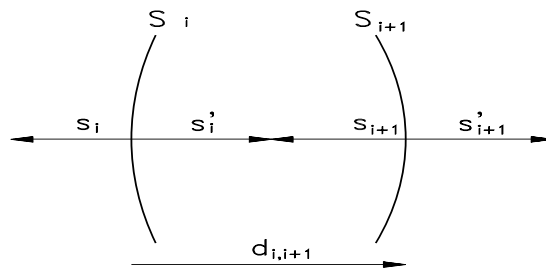


Figura 1.4: Fórmula de pas entre dues superfícies

Si la superfície és un mirall, aleshores  $n' = -n$  i la fórmula s'escriu

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}. \quad (1.6)$$

### 1.1.5 Augments. Plans focals i principals

#### Augment lateral

Es defineix l'*augment* com la relació d'alçades entre la imatge i l'objecte:  $\beta' = y'/y$ . Per a un sistema amb  $k$  superfícies que separen  $k + 1$  medis, l'augment es pot calcular com

$$\beta' = \frac{n_1}{n_{k+1}} \prod_{i=1}^k \frac{s'_i}{s_i}, \quad (1.7)$$

on  $s_i$  i  $s'_i$  són les distàncies objecte i imatge parcials referides a la superfície  $i$ .

### Plans focals i plans principals

1. El punt de l'eix òptic on es tallen els raigs que provenen de l'infinit i que són paral·lels a l'eix òptic s'anomena *focus imatge*. De forma anàloga, el punt de l'eix òptic que té per imatge l'infinit s'anomena *focus objecte*.
2. El pla perpendicular a l'eix òptic que conté el focus (o punt focal) s'anomena *pla focal*. Els raigs que provenen de l'infinit i que entren al sistema òptic formant un cert angle amb l'eix òptic es creuen en un punt del pla focal.
3. Anomenem *plans principals* dos plans conjugats perpendiculars a l'eix amb augment lateral  $\beta' = 1$  entre ells. El punt d'intersecció entre les perllongacions del raig provinent de l'infinit, i que és paral·lel a l'eix òptic, i del raig que a la sortida va a buscar el focus, marca la posició del pla principal imatge  $H'$ . El pla principal objecte  $H$  es troba de forma anàloga, considerant un raig que passa pel focus objecte. El coneixement dels plans principals i focals dóna tota la informació necessària per a l'estudi d'un sistema òptic en primer ordre amb independència de la seva complexitat.
4. La distància entre els plans principals i focals es denomina *distància focal* o simplement *focal*. Les focals objecte i imatge verifiquen la relació

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}. \quad (1.8)$$

5. En una superfície esfèrica, els plans principals  $H$  i  $H'$  estan superposats a la mateixa superfície esfèrica (fixeu-vos que estem en aproximació paraxial). Les focals es poden calcular fent servir l'invariant d'Abbe:

$$f' = r \frac{n'}{n' - n} \quad f = -r \frac{n}{n' - n}. \quad (1.9)$$

6. L'invers de la distància focal imatge s'anomena *potència*  $\phi = 1/f'$  i es mesura en diòptries ( $1 D = 1 m^{-1}$ ).

#### 1.1.6 Llei de les lents

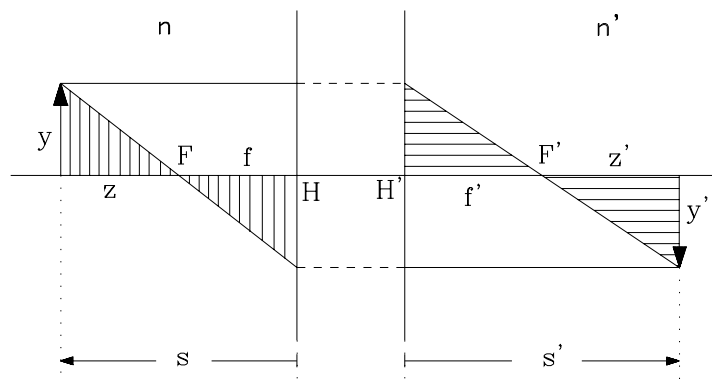


Figura 1.5: Llei de les lents

En un sistema òptic definit per la posició dels plans principals i focals, es verifiquen les relacions següents:

$$zz' = ff' \quad -\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'}, \quad (1.10)$$

on  $z$  i  $z'$  són les distàncies de l'objecte i de la imatge referides al focus. Si els índexs extrems són iguals, cas habitual en les lents i els instruments òptics,  $f = -f'$ ,

$$zz' = -f'^2 \quad -\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}. \quad (1.11)$$

En aquest cas, l'augment lateral és  $\beta' = s'/s$ .

### 1.1.7 Sistemes compostos

Tenim dos sistemes òptics ben definits pels seus plans principals i focals, disposats segons s'indica a la figura 1.6. Es pot demostrar que és possible determinar un únic sistema (*sistema compost*) de plans principals i focals conjunts, calculats a partir dels de cada sistema. En general, qualsevol sistema òptic, independentment de la seva complexitat, pot ser reduït a un únic parell de plans principals i focals. Això suposa una notable simplificació en l'estudi paraxial de sistemes òptics complexos, és a dir, formats per moltes lents i/o miralls.

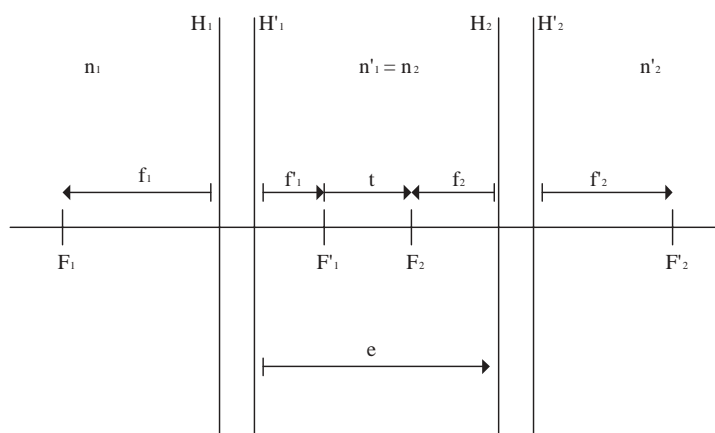


Figura 1.6: Sistemes compostos

A continuació s'indiquen les fórmules que permeten obtenir la focal conjunta d'un sistema compost així com les posicions dels seus plans principals i focals:

Cas general. Índexs $n_1, n_2, n'_2$	$n_1 = n_2 = n'_2$
$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{e - f'_1 + f_2}$	$f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - e}$
$H_1 H = \frac{e f_1}{e - f'_1 + f_2}$	$H_1 H = \frac{e f'_1}{f'_1 + f'_2 - e}$
$H'_2 H' = \frac{e f'_2}{e - f'_1 + f_2}$	$H'_2 H' = -\frac{e f'_2}{f'_1 + f'_2 - e}$

Taula 1.2: Fórmules d'acoblament de sistemes

### 1.1.8 Lents

Les lents són la base dels instruments òptics. Són dues superfícies refractives (en el cas que ens ocupa, superfícies esfèriques de radi  $r_1$  i  $r_2$ ), separades una distància  $e$ , que tanquen un medi d'índex  $n$ . Podem estudiar el seu funcionament considerant-les sistemes compostos, ja que cada superfície té els seus plans principals i focals associats. Aplicant les fórmules dels sistemes compostos podem determinar aquests valors. Siguin  $n_1$  i  $n'_2$  els índexs dels medis inicial i final i  $n$ , l'índex del material del qual està feta la lent:

Cas general. Índexs $n_1, n, n'_2$ diferents	Índexs extrems aire $n_1 = n'_2 = 1$
$\frac{1}{f'} = \frac{n-n_1}{n'_2} \frac{1}{r_1} + \frac{n'_2-n}{n'_2} \frac{1}{r_2} + \frac{(n-n_1)(n-n'_2)}{nn'_2} \frac{e}{r_1 r_2}$	$\frac{1}{f'} = (n-1) \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] + \frac{(n-1)^2}{n} \frac{e}{r_1 r_2}$
$H_1 H = -\frac{en_1 r_1 / (n-n_1)}{e-nr_1 / (n-n_1) - nr_2 / (n'_2-n)}$	$H_1 H = \frac{er_1}{n(r_1-r_2) - e(n-1)}$
$H'_2 H' = \frac{en_2 r_2 / (n'_2-n)}{e-nr_1 / (n-n_1) - nr_2 / (n'_2-n)}$	$H'_2 H' = \frac{er_2}{n(r_1-r_2) - e(n-1)}$

Taula 1.3: Fórmules de disseny de lents

### Lents primes

Si el gruix de la lent és petit enfront dels radis de curvatura, es verifica que

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right], \quad H_1 H = 0, \quad H'_2 H' = 0. \quad (1.12)$$

### 1.1.9 Formació d'imatges en una lent

Fórmula de formació d'imatges de les lents (si  $n_1 = n'_2 = 1$ ):  $-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$  (figures 1.7 a 1.14).

### 1.1.10 Formació d'imatges en un mirall esfèric

Fórmula de formació d'imatges en miralls esfèrics:  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f'}$  (figures 1.15 a 1.22).

### 1.1.11 Limitacions de llum i camp en sistemes òptics

- *Diafragma d'obertura.* Donat un sistema òptic, l'element (muntura de lent, diafragma intercalat, ...) que limita la quantitat de llum que travessa el sistema s'anomena *diafragma d'obertura*. La seva imatge a l'espai objecte indica la mida de l'obertura per on penetra la llum i rep el nom de *pupila d'entrada*. La imatge del diafragma d'obertura a l'espai imatge indica la mida de l'obertura per on surt la llum i rep el nom de *pupila de sortida*.
- *Diafragma de camp.* Donat un sistema òptic, l'element (muntura de lent, diafragma intercalat, ...) que limita la mida de l'objecte (camp) s'anomena *diafragma de camp*. La seva imatge a l'espai objecte rep el nom de *lluerna d'entrada*. La imatge del diafragma de camp a l'espai imatge, que indica les dimensions de la imatge obtinguda a través del sistema, rep el nom de *lluerna de sortida*.

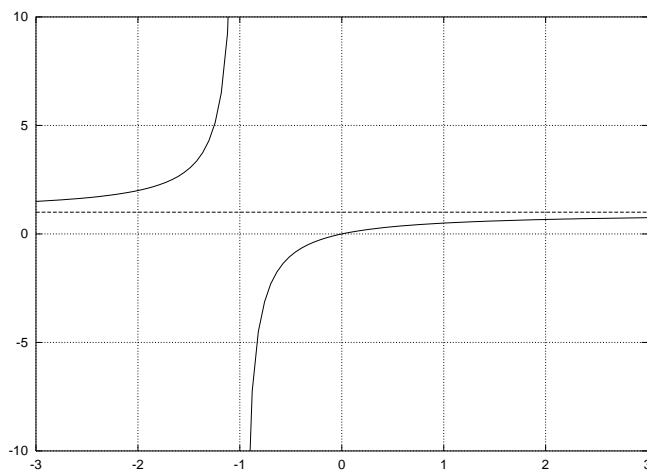


Figura 1.7: Gràfica  $s'(s)$  per a una lent convergent de  $f' = 1$  m

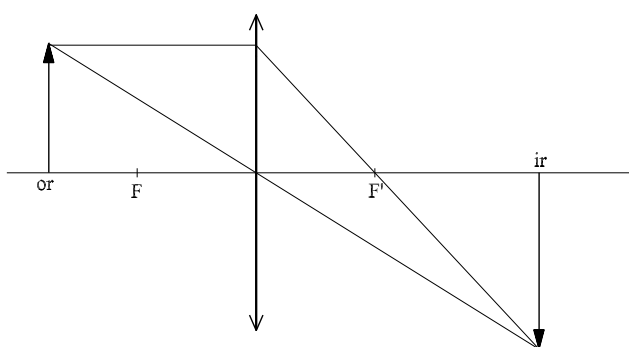


Figura 1.8: Lent convergent. Objecte real i imatge real

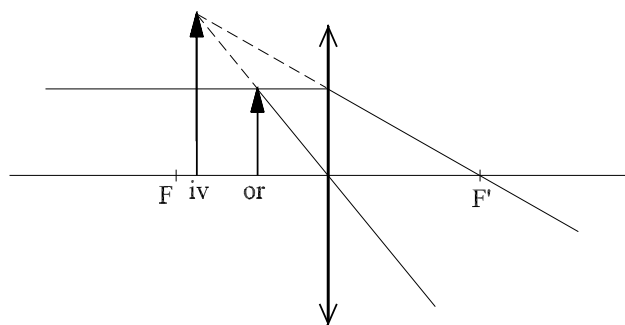


Figura 1.9: Lent convergent. Objecte real i imatge virtual

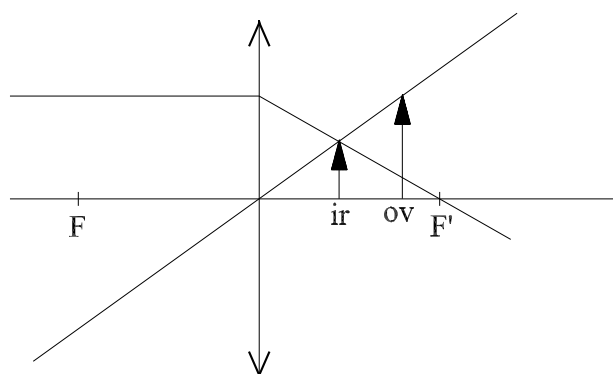


Figura 1.10: Lent convergent. Objecte virtual i imatge real

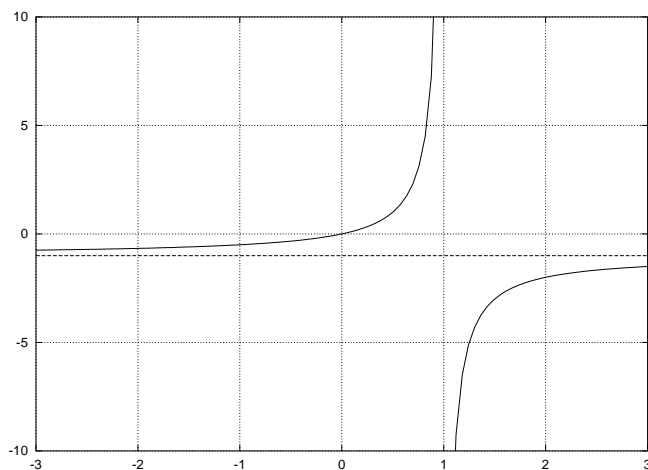


Figura 1.11: Gràfica  $s'(s)$  per a una lent divergent de  $f' = -1$  m

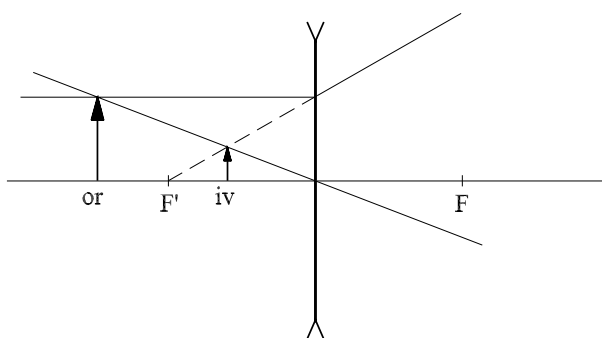


Figura 1.12: Lent divergent. Objecte real i imatge virtual

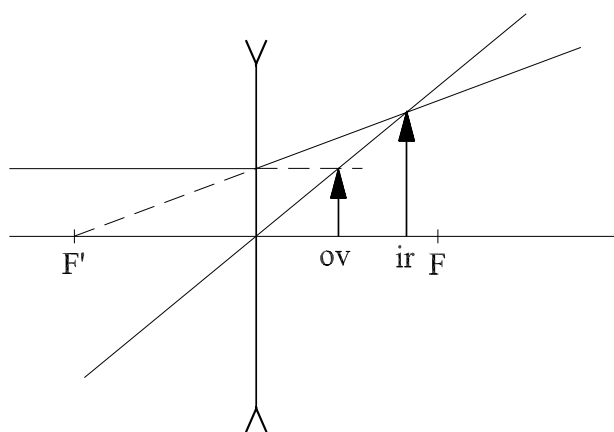


Figura 1.13: Lent divergent. Objecte virtual i imatge real

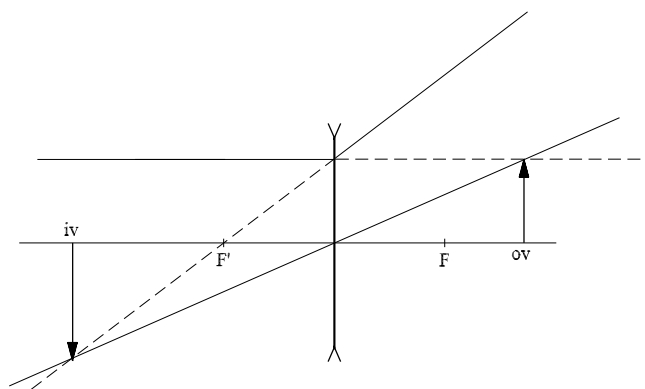


Figura 1.14: Lent divergent. Objecte virtual i imatge virtual

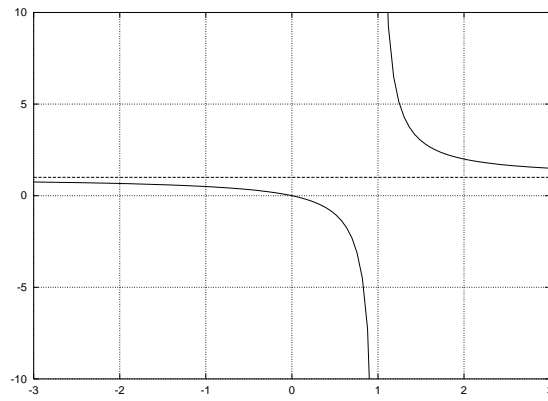


Figura 1.15: Gràfica  $s'(s)$  per a un mirall esfèric convex de  $f' = 1$  m

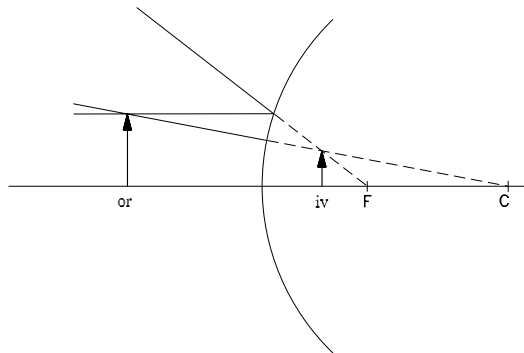


Figura 1.16: Mirall esfèric convex. Objecte real i imatge virtual

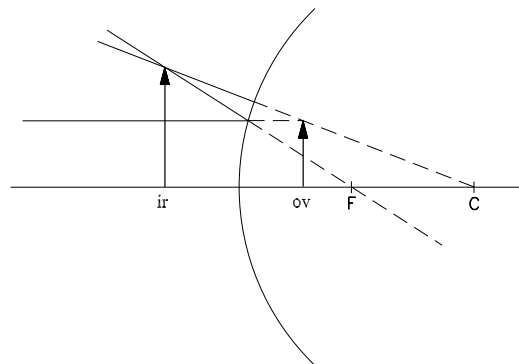


Figura 1.17: Mirall esfèric convex. Objecte virtual i imatge real

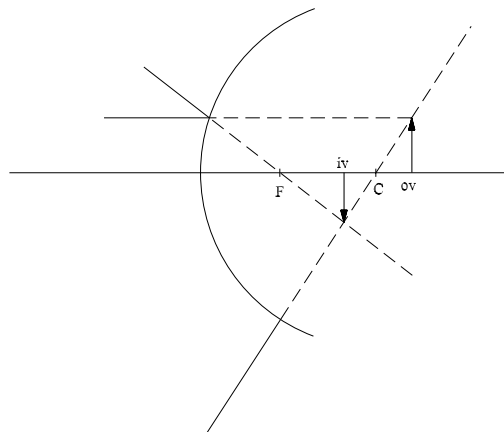


Figura 1.18: Mirall esfèric convex. Objecte virtual i imatge virtual

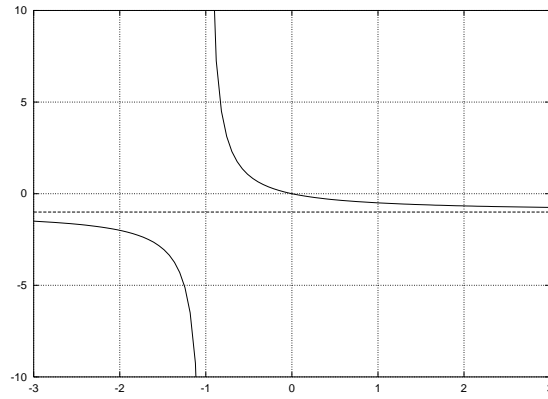


Figura 1.19: Gràfica  $s'(s)$  per a un mirall esfèric còncav de  $f' = -1$  m

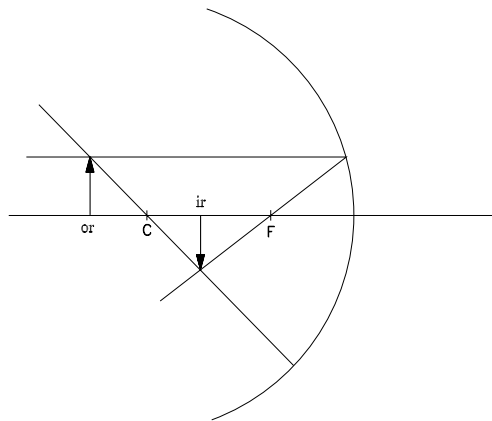


Figura 1.20: Mirall esfèric còncav. Objecte real i imatge real

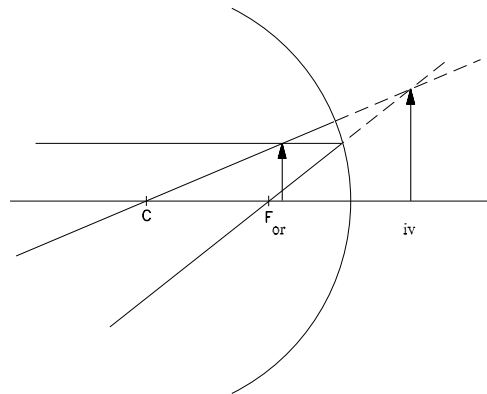


Figura 1.21: Mirall esfèric còncav. Objecte real i imatge virtual

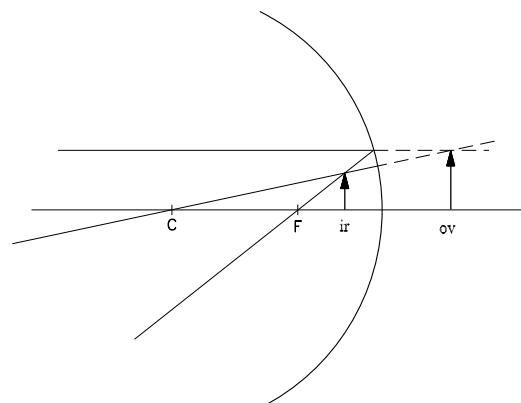


Figura 1.22: Mirall esfèric còncav. Objecte virtual i imatge real



## 1.2 Instruments de projecció

### 1.2.1 Introducció als instruments de projecció

Els instruments de projecció estan dissenyats per formar la imatge d'un objecte sobre un pla de referència. Normalment estan constituïts per un sistema convergent, de manera que s'obté una imatge real a partir d'un objecte també real. La física associada a aquest problema pot ser explicada a partir de la fórmula de formació d'imatge:

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}, \quad (1.13)$$

on  $s$  i  $s'$  són les distàncies del sistema òptic a l'objecte i a la imatge, respectivament, i  $f'$  és la distància focal del sistema. L'augment geomètric  $\beta'$  és la relació entre les distàncies  $s'$  i  $s$ :

$$\beta' = \frac{s'}{s}. \quad (1.14)$$

L'augment és negatiu en els sistemes projectors (imatge invertida). Si  $|\beta'| < 1$ , la imatge és més petita que l'objecte, mentre que si  $|\beta'| > 1$  la imatge és més gran que l'objecte. Per exemple, habitualment les càmeres fotogràfiques, projecten un objecte en una imatge que ha de tenir les dimensions del negatiu fotogràfic. Això normalment correspondrà a  $|\beta'| < 1$ . A diferència d'això en un projector de diapositives el que interessa és veure una imatge molt ampliada d'una diapositiva, i per tant  $|\beta'| > 1$ .

### 1.2.2 L'ull humà

L'estudi de l'ull humà des del punt de vista dels instruments òptics té un interès doble. Per una banda es tracta d'un instrument de projecció. Per l'altra banda, el disseny d'alguns aparells com els telescopis i els microscopis s'ha de fer tenint en compte el funcionament de l'ull. Destaquem les parts més importants (vegeu la figura 1.23):

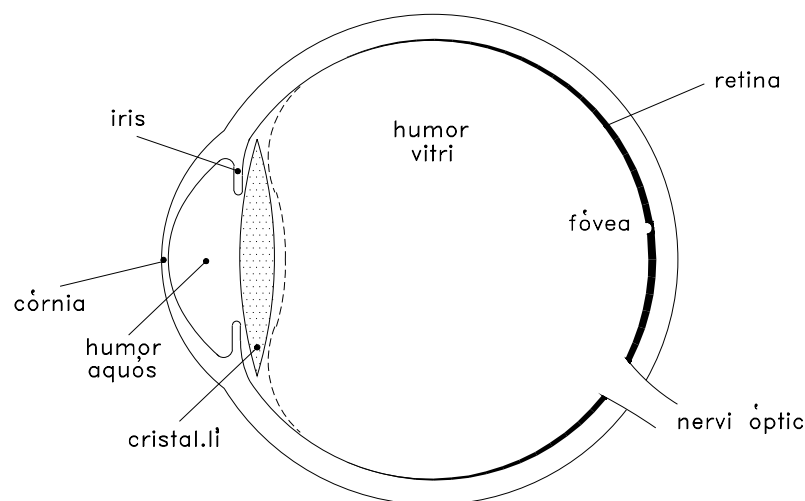


Figura 1.23: Esquema de l'ull humà

- *El cristallí.* És una lent convergent de focal variable. La distància  $s'$  és fixa, mentre que l'ull enfoca a diferents distàncies. Recordeu que s'ha de verificar la llei de les lents,  $-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$ . Aquest fenomen s'anomena *acomodació*; una persona pot veure nítidament des de l'infinit fins a un punt proper situat, de mitjana, a 25 cm de l'ull.
- *La retina i la fòvea.* La retina és la part de l'ull on es forma la imatge. Està plena de cèl·lules nervioses sensibles a la llum que envien la informació del senyal lluminós cap al cervell. La zona de la retina on la imatge es forma més nítidament s'anomena *fòvea*.
- *L'iris* es comporta com un diafragma. Es tanca quan hi ha un excés de llum i s'obre quan les condicions de llum són deficientes.
- Un ull *miop* és aquell que enfoca la imatge de l'infinit en un pla situat abans de la retina. Aquest defecte visual es corregeix amb l'ús de lents divergents. Si la imatge de l'infinit es forma darrere la retina, es diu que l'ull és *hipermetrop*. Per corregir aquest defecte s'utilitzen lents convergents.

### 1.2.3 La càmera fotogràfica

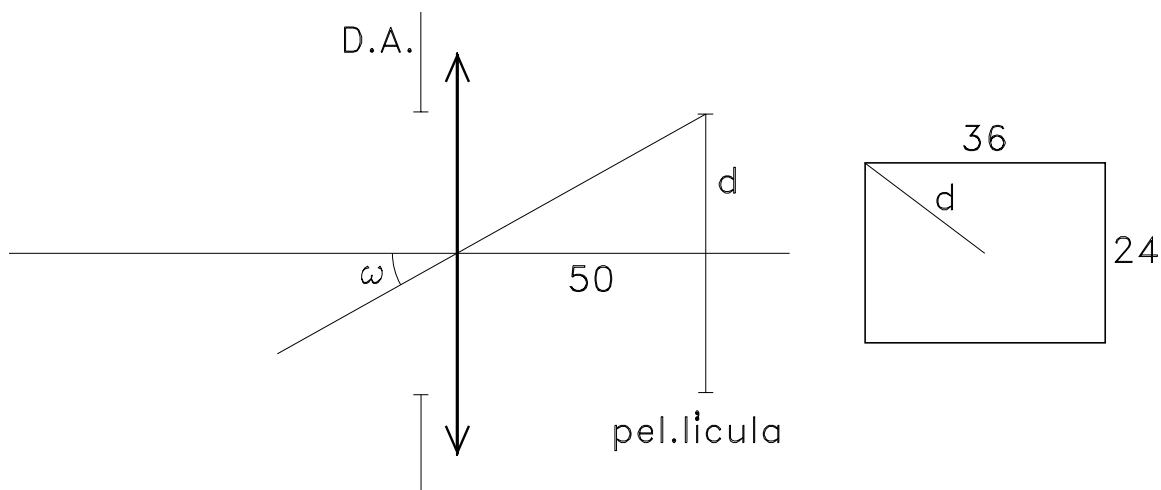


Figura 1.24: Esquema de la càmera fotogràfica

Des del punt de vista òptic, la càmera fotogràfica és molt semblant a l'ull. Consisteix en un sistema mòbil de lents convergents (objectiu). En el pla on es forma la imatge es col·loca la pel·lícula. La posició d'aquest pla està fixada. La càmera enfoca un objecte situat a una certa distància  $s$ . Modificant la posició de la lent es modifica la distància  $s'$ , de manera que es verifiqui la llei de formació d'imatges  $-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$ , fent coincidir el pla de formació d'imatge amb el pla de la pel·lícula.

L'objectiu incorpora un diafragma (pupilla d'entrada) que regula la quantitat de llum que penetra en el sistema. El màxim angle de camp  $\omega$  que pot entrar en el sistema està condicionat per les dimensions del negatiu (24 x 36 mm per a pel·lícules estàndard) i per la distància objectiu-pel·lícula.

L'*obertura relativa* es defineix com el quocient entre el diàmetre de la pupilla d'entrada i la focal del sistema i és una mesura de la quantitat de llum que arriba a la pel·lícula. Per altra banda, es defineix el *número de diafragma*  $N$  com el valor invers de l'obertura relativa  $N = f'/\phi_{PE}$ . Els valors de  $N$  estan

estandarditzats (2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22) seguint una progressió geomètrica de raó  $\sqrt{2}$ . D'aquesta manera, en augmentar  $N$  en un valor, la quantitat de llum es redueix a la meitat.

Paraxialment, la imatge d'un punt és un punt. No obstant això, la pel·lícula fotogràfica està constituïda de tal manera que, en incidir llum sobre un punt de la pel·lícula, s'enregistra en el negatiu una taca de dimensions finites. Aquesta zona s'anomena *gra de la pel·lícula*. Les pel·lícules més sensibles (és a dir, aquelles que necessiten menys llum per enregistrar una escena) presenten menys definició (la grandària del gra és més gran). Per altra banda, les pel·lícules de més definició requereixen bones condicions de llum per treballar adequadament. El fet que les pel·lícules presentin una resolució limitada es tradueix en els fenòmens òptics de la profunditat de focus i la profunditat de camp.

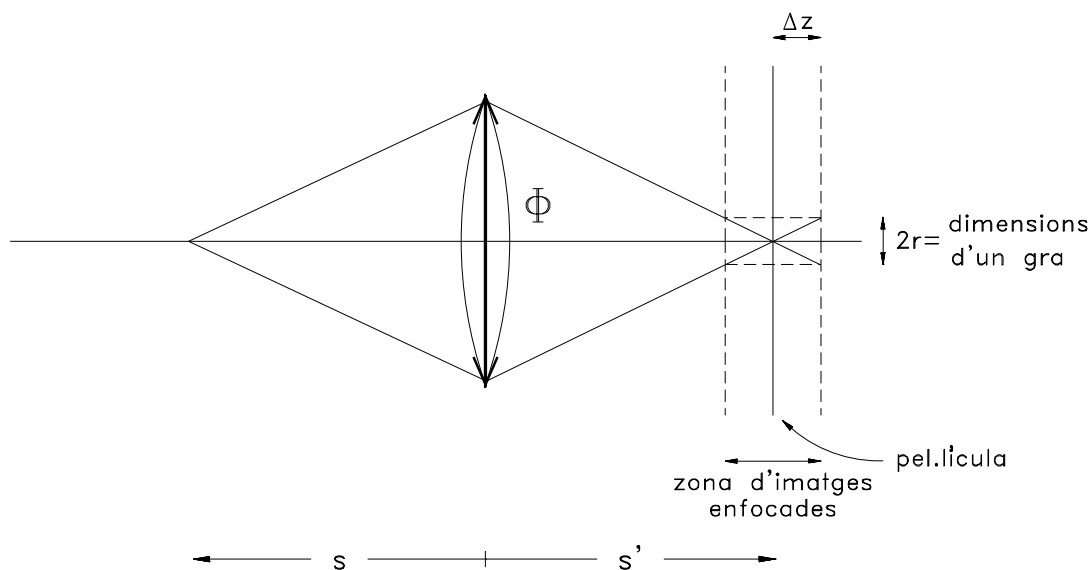


Figura 1.25: Concepte de profunditat de focus

Un objecte situat a una distància  $s$  davant d'una lent de focal  $f'$ , forma la seva imatge a distància  $s'$ . Sigui  $2r$  el diàmetre del gra de la pel·lícula, suposat circular. Segons es dedueix de la figura 1.25 el pla de la pel·lícula podria estar situat en qualsevol posició dins la 'zona d'imatges enfocades' ( $2\Delta z'$ ). Si enfoquem un objecte a l'infinit, es verifica  $\Delta z' = 2rN$ . Per tant, quan més tancat estigui l'objectiu ( $N$  més gran), més augmentarà la profunditat de focus.

Aquest concepte pot ser traslladat a l'espai objecte: en fixar la distància  $s$  movent l'objectiu assegurem que en el pla a distància  $s'$  es forma la imatge. Ara bé, tots els plans a l'entorn de  $s$  també quedaran enfocats a conseqüència de les dimensions finites del gra de la pel·lícula. Aquest fenomen s'anomena *profunditat de camp*.

#### 1.2.4 Objectius fotogràfics

De la figura 1.24 es dedueix que el màxim angle de camp que pot penetrar a la càmera fotogràfica està condicionat per la grandària de la pel·lícula fotogràfica i per la distància imatge  $s'$ . Si interessa fotografiar àrees molt extenses, cal que l'angle de camp màxim sigui molt gran. Perquè passi això, la focal de l'objectiu ha de ser petita. Aquests dispositius s'anomenen *grans angulars*, treballen amb angles grans i, en conseqüència, han d'estar molt ben corregits d'aberracions (distorsió, coma, astigmatisme).

Per altra banda, si fotografem amb detall un objecte llunyà, l'angle màxim de camp és petit. Això implica que la distància focal de l'objectiu ha de ser gran per poder resoldre l'objecte. Hi ha problemes pràctics per utilitzar lents de focal molt gran. Per exemple, utilitzar una lent de  $f' = 500$  mm, suposa que entre la lent de l'objectiu i el negatiu hi ha d'haver una distància d'aproximadament 50 cm.

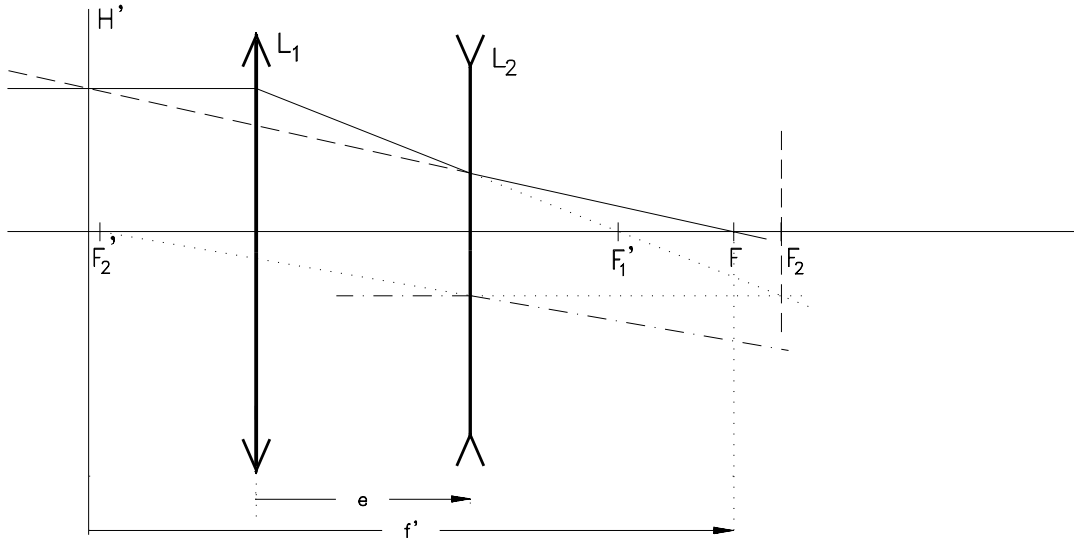


Figura 1.26: Sistema teleobjectiu . El raig paral·lel a l'eix òptic que arriba a la lent divergent ha d'anar a parar a  $F_2'$ , prenent-lo com a referència del raig que va a parar a la focal del sistema

Per construir sistemes compactes, s'utilitzen els *teleobjectius*, que consisteixen en una lent convergent i una de divergent separades una distància  $e$ . Fent el traçat de raigs, tal com s'indica a la figura 1.26, es pot veure que el pla principal imatge s'allunya i la distància focal es fa gran. Això s'aconsegueix mantenint dimensions raonables de la càmera. Recordeu que la focal conjunta d'un sistema de dues lents es calcula a partir de la relació

$$f' = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - e}. \quad (1.15)$$

Per tant, amb dues lents, una de convergent i l'altra de divergent, es pot obtenir tot un rang de focals modificant la distància  $e$ . El *zoom* és un teleobjectiu especial on la distància  $e$  és ajustable per l'usuari. D'aquesta manera s'aconsegueix una variació contínua de focal i, en conseqüència, el fotògraf pot enquadrar l'escena de manera més adient.

### 1.2.5 Sistemes d'il·luminació de projectors

Els projectors consten d'un objectiu, un sistema de lents convergents, que projecta una transparència sobre una pantalla. Normalment interessa que l'augment lateral sigui gran. El problema en els projectors és aconseguir que la transparència estigui uniformement il·luminada.

Una possibilitat consisteix a fer servir una bombeta i, mitjançant una lent denominada *condensador*, projectar el filament de la bombeta sobre la transparència. En aquest sistema d'il·luminació, denominat

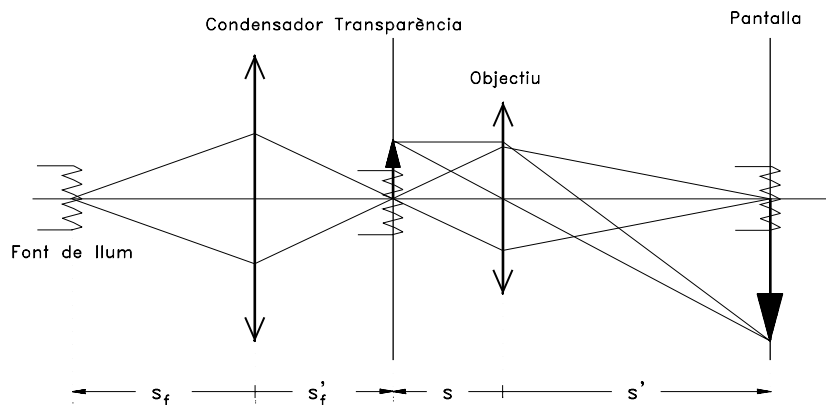


Figura 1.27: Sistema d'il·luminació crítica

*il·luminació crítica*, el filament apareix sobre la pantalla, la il·luminació és poc uniforme i les zones de la transparència que són il·luminades directament per la bombeta poden deteriorar-se com a conseqüència de l'alta temperatura.

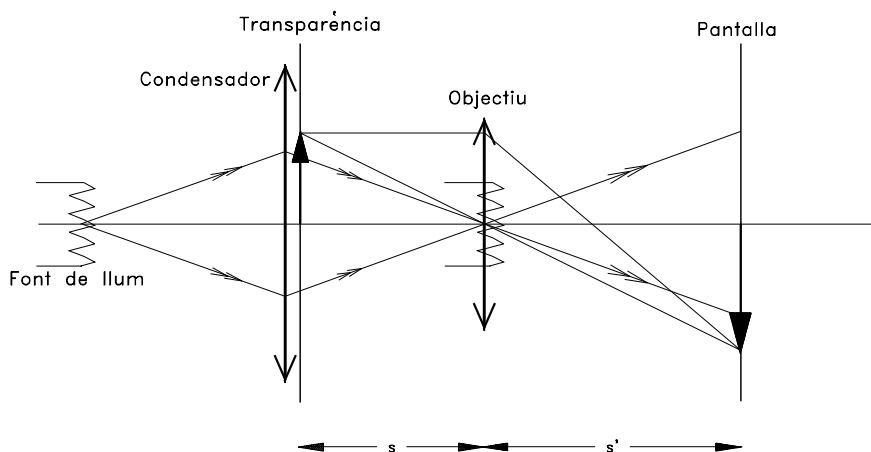


Figura 1.28: Sistema d'il·luminació Köhler

El sistema d'*il·luminació Köhler* consisteix a formar la imatge del filament sobre l'objectiu amb l'ajut de la lent condensadora. Així, el filament no es projecta sobre la pantalla. La transparència es col·loca junt al condensador. D'aquesta manera, la transparència rep una llum més uniforme.

## 1.3 Telescopis

### 1.3.1 Introducció

Els telescopis són instruments dissenyats per observar objectes molt allunyats. Es tracta de sistemes afocals. Això vol dir que la imatge de l'infinit a través del telescopi està també a l'infinit. Igual que el microscopi, els telescopis es dissenyen de manera que els raigs emergents de l'instrument surtin paral·lels,

és a dir, cap a l'infinit. D'aquesta manera, l'ull pot treballar sense acomodació, i per tant no es força la vista mentre s'utilitza l'instrument. Finalment, la imatge de l'infinit es projecta a la retina.

Els telescopis i els microscopis estan formats bàsicament per dos sistemes òptics: objectiu i ocular. L'ocular del telescopi i del microscopi funcionen de manera anàloga. Es tracta d'un sistema de lents que té un pla focal objecte on es forma la imatge produïda per l'objectiu i, per tant, aquesta es projecta de nou cap a l'infinit a través de l'ocular.

### 1.3.2 Ullera astronòmica

La *ullera astronòmica* és el telescopi més simple. Consisteix en dos sistemes de lents convergents: l'objectiu, de focal  $f'_{obj}$ , i l'ocular, amb focal  $f'_{oc}$ . El pla focal imatge de l'objectiu i el pla focal objecte de l'ocular són coincidents. Així, els raigs que provenen de l'infinit formen una imatge intermèdia al pla focal comú. L'ocular projecta de nou aquesta imatge a l'infinit. La figura 1.29 mostra el traçat de raigs a través d'aquest telescopi. Els raigs que entren paral·lels a l'eix òptic es creuen en el punt focal imatge de l'objectiu; en travessar l'ocular tornen a sortir paral·lels a l'eix òptic. El raig que entra per l'extrem superior de l'objectiu surt ara per sota, indicant de forma gràfica que l'instrument tindrà un augment negatiu. Els raigs que entren en el sistema formant un cert angle  $\omega$  amb l'eix òptic es creuaran en un cert punt del pla focal comú. Per determinar aquest punt cal recordar que el raig que passa pel centre de la lent no es desvia. En passar aquests raigs a través de l'ocular, formen un nou angle  $\omega'$  amb l'eix òptic. Per determinar la direcció de sortida, s'ha indicat amb línia discontinua un raig auxiliar que passa pel punt del pla focal on s'han creuat els raigs que entren formant un angle *omega* amb l'eix i que passa sense desviar-se pel centre de l'ocular.

Al pla focal comú, es col·loca el diafragma de camp. La grandària de la imatge de l'infinit que es forma en aquest pla està limitada per les dimensions d'aquest diafragma. La grandària d'aquest objecte intermedi és una mesura directa de l'angle màxim que pot penetrar en el telescopi. Per altra banda, la limitació sobre la quantitat de llum que penetra en el sistema (diafragma d'obertura, DO) es troba a l'objectiu. Com que no tenim cap sistema òptic previ a l'objectiu, fa també de pupil·la d'entrada. En calcular la imatge del DO a través de l'ocular, obtenim la posició i les dimensions de la pupil·la de sortida (PS). Aquest és el pla on s'ha de col·locar l'ull per observar a través de la ullera (*pla d'emergència de pupil·la*). Si ens fixem en el traçat de raigs en eix, es podria pensar que qualsevol pla a partir de l'ocular fóra adequat per posar l'ull. En fer el traçat de raigs en camp es veu que l'única manera de no perdre raigs és posar l'ull a la PS.

En els telescopis l'augment ve donat per la relació entre el que es veu a través de l'instrument respecte al que es veuria a ull nu. L'augment obtingut amb aquest sistema és

$$\Gamma = \frac{\tan(\omega')}{\tan(\omega)} = -\frac{f'_{obj}}{f'_{oc}} = -\frac{\phi_{PE}}{\phi_{PS}}. \quad (1.16)$$

Cal destacar que aquest augment és negatiu. Aquest resultat es pot demostrar fàcilment a partir d'equivalències de triangles en la figura 1.29.

### 1.3.3 Ullera de Galileu

La *ullera de Galileu* és un instrument amb un disseny molt semblant a la ullera astronòmica. Aquesta darrera presenta un augment negatiu i per tant genera un problema d'ordre pràctic en utilitzar-la a la

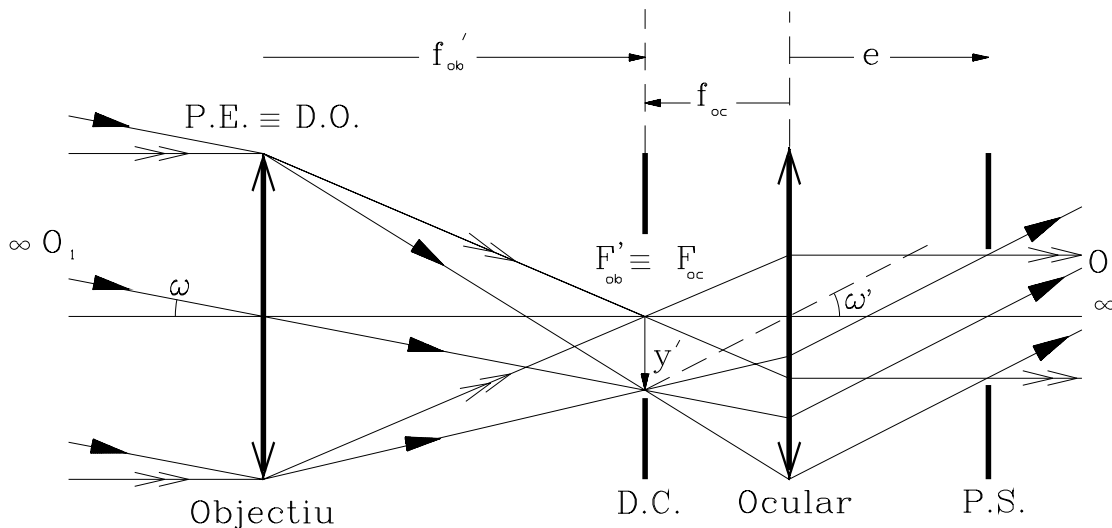


Figura 1.29: Ullera astronòmica

Terra, ja que l'observador veu els objectes a l'inrevés. Per aconseguir un augment positiu, s'utilitza una lent o sistema divergent com a ocular. El pla focal imatge de l'objectiu i el pla focal objecte de l'ocular són també coincidents. Les figures 1.30 i 1.31 mostren el traçat de raigs en eix i en camp. És fàcil demostrar que aquí l'augment també es descriu per

$$\Gamma = \frac{\tan(\omega')}{\tan(\omega)} = -\frac{f'_{obj}}{f'_{oc}} > 0. \quad (1.17)$$

Com que ara el valor de  $f'_{oc}$  és negatiu, ja que la lent és divergent, l'augment visual de l'instrument és positiu.

Per trobar la posició de la pupil·la de sortida, es calcula la imatge de la muntura de l'objectiu a través de l'ocular. Aquesta es troba a l'interior del telescopi i en conseqüència l'objectiu no actua de diafragma d'obertura. L'ull s'haurà d'acostar al màxim a l'ocular i mirar a través d'ell. La imatge de l'objectiu limitarà el camp que veurà l'ull i, per tant, l'objectiu fa de diafragma de camp del conjunt telescopi-ull, i la seva imatge de *lluerna de sortida*.

### 1.3.4 Ullera terrestre

La *ullera terrestre* és una alternativa per aconseguir telescopis amb augment visual positiu sense que es generin els problemes de vinyetatge propis de la ullera de Galileu. Es tracta d'una ullera astronòmica a la qual s'ha afegit una lent denominada *inversora*. La imatge de l'infinit es forma al pla focal imatge de l'objectiu. Aquesta imatge es projecta a través de la lent inversora i es forma una nova imatge intermèdia. El pla de formació d'aquesta imatge és coincident amb el pla focal objecte de l'ocular, i per tant els raigs surten paral·lels del sistema. Com que l'augment de la projecció a través de la lent inversora és negatiu, l'augment total és positiu.

Es pot demostrar que la ullera terrestre té un augment visual que és igual a

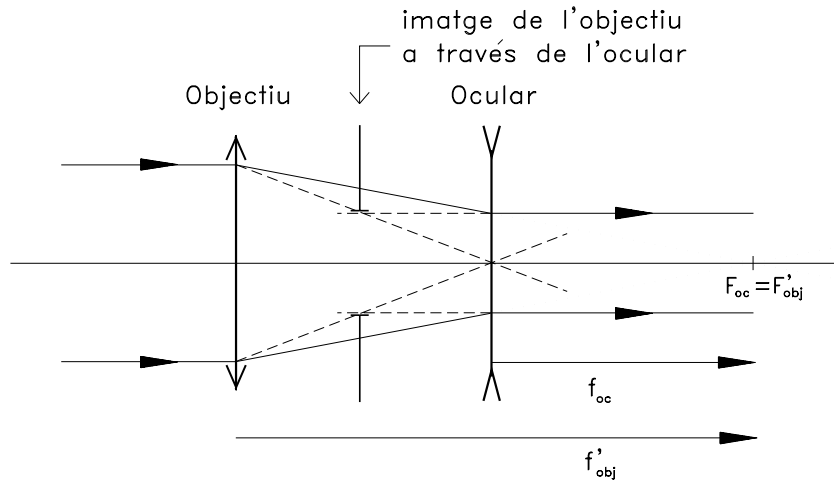


Figura 1.30: Ullera de Galileu (traçat de raigs en eix)

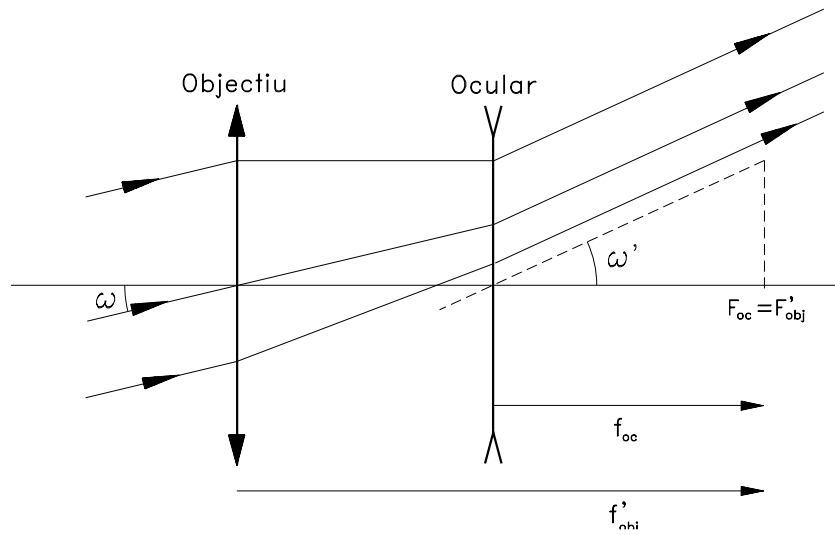


Figura 1.31: Ullera de Galileu (traçat de raigs en camp)

$$\Gamma_{ut} = \frac{\tan(\omega')}{\tan(\omega)} = -\frac{f'_{obj} s'}{f'_{oc} s} = \Gamma_{ua} \beta'_{inv} \quad (1.18)$$

L'augment visual en aquest cas és igual a l'augment visual corresponent a la ullera astronòmica que podríem construir sense inversora, multiplicat per l'augment lateral de la projecció de la imatge intermèdia a través de la lent inversora. Com que els dos augments parcials són negatius, l'augment total és positiu.

En aquest instrument, l'objectiu ha de fer de pupil·la d'entrada. La posició de la imatge d'aquesta a través de la inversora i l'ocular indica on s'ha de col·locar l'ull. El diafragma de camp en aquest instrument està situat equivalentment al pla focal imatge de l'objectiu o al pla focal objecte de l'ocular, encara que generalment es troba en el darrer.



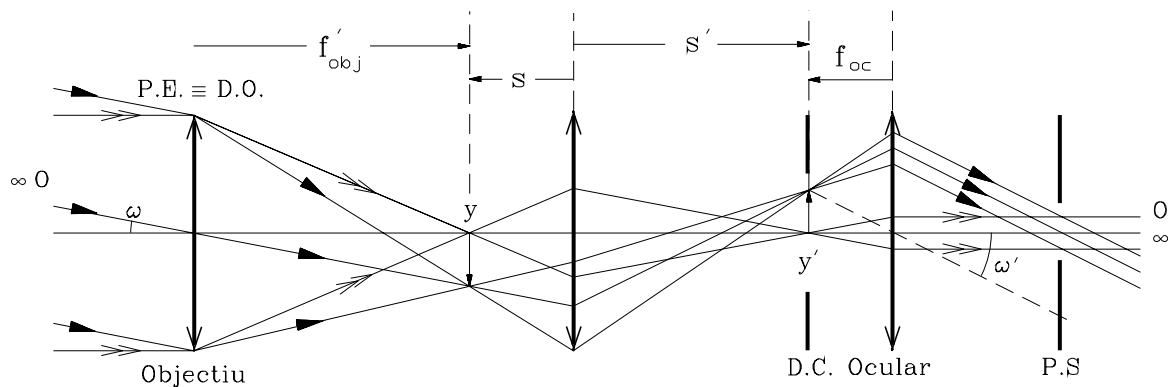


Figura 1.32: Ullera terrestre

### 1.3.5 Telescopis de miralls

Basant-se en el telescopi astronòmic es poden dissenyar telescopis en els quals l'objectiu es construeixi amb un sistema de miralls en comptes de lents. Aquests sistemes són de gran lluminositat i presenten valors de  $f'_{obj}$  molt grans. A més a més, els miralls no presenten aberració cromàtica. Els grans telescopis tenen arquitectures d'aquests tipus. La figura 1.33 mostra un exemple de telescopi de miralls: en determinar la posició del pla principal objecte obtenim que la focal de l'objectiu és molt gran, la qual cosa suposa un valor de l'augment molt elevat.

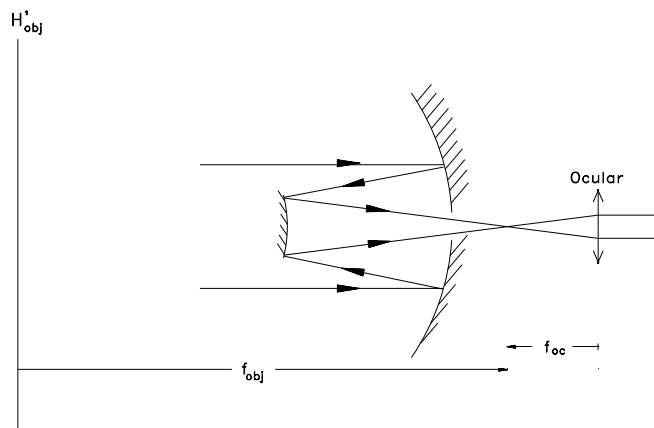


Figura 1.33: Telescopi de Cassegrain

## 1.4 Microscopis

### 1.4.1 La lupa. L'objectiu del microscopi

Un microscopi és un sistema òptic dissenyat per observar objectes petits. Si volem observar un objecte molt petit, el que farem serà apropar-nos-hi al màxim, és a dir fins que l'ull sigui capaç d'acomodar. Aquesta distància mínima per la qual l'ull encara és capaç d'enfocar s'anomena *distància del punt proper*

i es pren, com a mitjana, 250 mm.

El microscopi està basat en el funcionament de la lupa. En mirar un objecte d'alçada  $y_0$  a ull nu, situarem l'ull a 250 mm de l'objecte. La tangent de l'angle  $\omega$  (vegeu figura 1.34) és  $\tan(\omega) = -y_0/250$ . Si visualitzem ara l'objecte a través d'una lent convergent, el podem veure amb un cert augment. Col·loquem l'objecte al pla focal objecte de la lent (vegeu la figura 1.35) i observem. Els raigs sortiran paral·lels després de travessar la lent. El raig que passa pel centre de la lent i l'extrem de l'objecte formarà un angle  $\omega'$  respecte a l'eix òptic. La tangent d'aquest angle serà  $\tan(\omega') = y_0/f$ . Per tant, l'augment visual serà

$$\Gamma = \frac{\tan(\omega')}{\tan(\omega)} = \frac{250}{f'} \quad (\text{La focal s'ha d'expressar en mm.}) \quad (1.19)$$

Noteu que aquest augment és positiu.

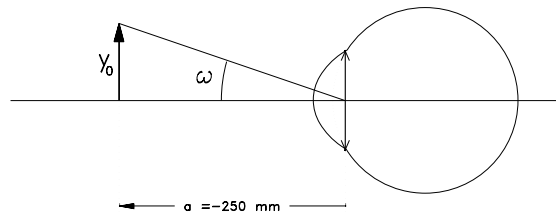


Figura 1.34: Observació d'un objecte sense instrument

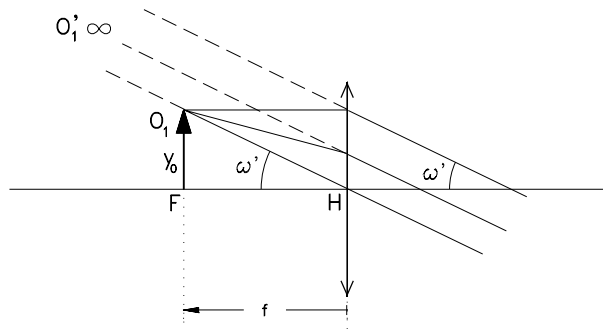


Figura 1.35: Observació d'un objecte amb lupa

### 1.4.2 El microscopi compost

El microscopi es dissenya afegint una etapa projectora (objectiu) prèvia a la lent actuant com a lupa (ocular). L'objecte a observar es col·loca a distància  $s$  del l'objectiu. La imatge a través de l'objectiu es forma a distància  $s'$  d'aquesta lent. El pla on es forma aquesta imatge intermèdia és coincident amb el pla focal objecte de la lent que actua com a lupa (ocular). Els raigs surten paral·lels després de travessar l'ocular i així, l'ull pot observar en condicions de no acomodació.

Sigui  $t$  la distància entre el pla focal imatge de l'objectiu i el pla focal objecte de l'ocular. Es pot demostrar que l'augment visual d'aquest instrument és

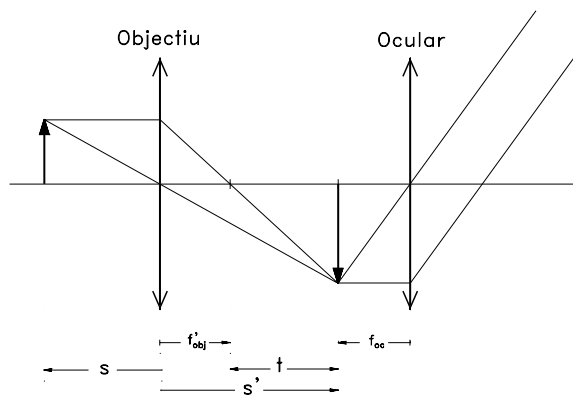


Figura 1.36: Microscopi

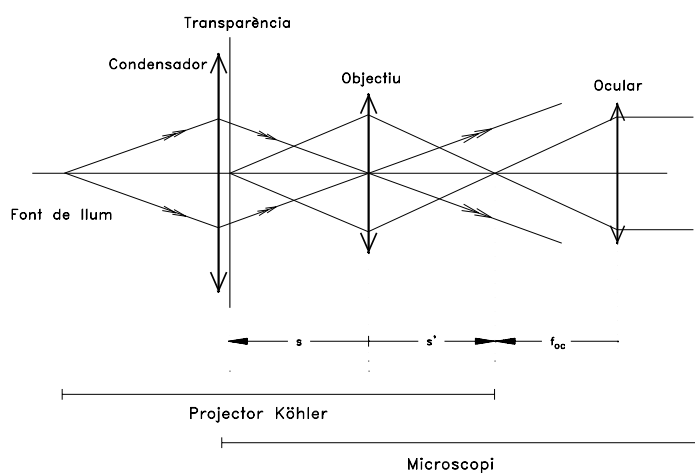


Figura 1.37: Microscopi amb il·luminació Köhler

$$\Gamma = \frac{\tan(\omega')}{\tan(\omega)} = -\frac{t}{f'_{obj}} \frac{250}{f'_{oc}} = \beta'_{obj} \Gamma_{oc}, \quad (1.20)$$

és a dir, l'augment de l'instrument es calcula multiplicant els augments de l'objectiu  $\beta'_{obj}$  pels augments de l'ocular  $\Gamma_{oc}$ . Com en el telescopi, l'objectiu fa de diafragma d'obertura. La seva imatge a través de l'ocular, és la pupil·la de sortida, on es col·loca l'ull. El diafragma de camp es troba situat al pla focal objecte de l'ocular.

Un aspecte important en el disseny d'un microscopi és la il·luminació de la mostra. Podem utilitzar, per exemple, un sistema d'il·luminació Köhler per fer-ho. La mostra es col·loca enganxada al condensador i per tant és il·luminada uniformement. L'esquema d'aquest instrument es pot observar a la figura 1.37.

## Capítol 2

# Òptica Electromagnètica

### 2.1 Ones electromagnètiques

#### 2.1.1 Equacions de Maxwell

L'instrument bàsic per descriure els fenòmens relacionats amb l'òptica ondulatoria són les equacions de Maxwell, que en el sistema CGS Gauss s'escriuen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{4\pi\vec{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

on  $\vec{H}$  és el camp magnètic,  $\vec{E}$  és el camp elèctric,  $\vec{D}$  és el vector desplaçament,  $\vec{B}$  és el vector inducció magnètica,  $\vec{j}$  és la densitat de corrent,  $\rho$  és la densitat de càrrega i  $c$  és una constant de proporcionalitat. Les equacions de Maxwell es complementen amb les relacions constitutives següents:

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \quad \vec{j} = \sigma\vec{E},\tag{2.2}$$

on  $\epsilon$  és la constant dielèctrica,  $\mu$  és la permeabilitat magnètica i  $\sigma$  és la conductivitat elèctrica. En un medi dielèctric homogeni i isòtrop, sense càrrega  $\rho = 0$ ,  $\epsilon$  i  $\mu$  constants, i  $\sigma = 0$ . Les equacions se simplifiquen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Quan un camp electromagnètic canvia de medi, les components normals i tangencials d'aquest verifiquen les relacions següents:

$$\begin{aligned}
\text{Components normals: } \vec{n}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= 4\pi\rho_s \quad \vec{n}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\
\text{Components tangencials: } \vec{n} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 \quad \vec{n} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_s,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

on  $\vec{n}$  és el vector normal a la superfície, i  $\rho_s$  i  $\vec{j}_s$  són les densitats superficials de càrrega i corrent, respectivament. Els subíndexs 1 i 2 fan referència als camps en el medi original i en el medi en el qual es transmeten els camps, respectivament. Si les densitats de càrrega i corrent són zero,  $\rho_s = 0$  i  $\vec{j}_s = 0$ , aleshores es verifiquen les relacions de continuïtat següent:

$$\begin{aligned}
\text{Components normals: } D_2^n &= D_1^n \quad B_2^n = B_1^n \\
\text{Components tangencials: } E_2^t &= E_1^t \quad H_2^t = H_1^t
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Els superíndexs  $n$  i  $t$  fan referència a les components normals o tangencials.

### 2.1.2 L'equació d'ones. Solucions

En un medi homogeni i isòtrop, en combinar les equacions de Maxwell s'obté el parell d'equacions següent:

$$\begin{aligned}
\Delta \vec{H} &= \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \\
\Delta \vec{E} &= \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Aquestes expressions són formalment equacions d'ones. Així, la velocitat de propagació es pot relacionar amb els paràmetres  $c$ ,  $\epsilon$  i  $\mu$ :

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \tag{2.7}$$

En el buit  $\epsilon = \mu = 1$ , i per tant  $v = c$ . És a dir  $c$  és la velocitat de la llum en el buit. L'índex de refracció es pot escriure en funció dels paràmetres  $\mu$  i  $\epsilon$ ,  $n = c/v = \sqrt{\epsilon\mu}$ .

Sigui  $\vec{r} = (x, y, z)$  el vector posició d'un punt de l'espai i  $\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$  el vector unitari ( $\|\vec{s}\| = 1$ ) que indica la direcció de propagació de la ona. Es pot comprovar fàcilment que una funció  $f$  del tipus  $f(vt \pm \vec{r}\vec{s})$  és solució de l'equació d'ones. Aquesta solució de l'equació d'ones s'anomena *ona plana*. En el cas unidimensional escriurem l'equació d'ones com

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{2.8}$$

En aquest cas particular,  $\vec{s} = (1, 0, 0)$ , i la solució s'escriu com  $f(vt+x)$  o  $f(vt-x)$ . De les relacions entre la pulsació  $\omega$ , el període  $T$ ,  $T = 2\pi/\omega$ , la longitud d'ona  $\lambda$ , el número d'ona  $k$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ , la freqüència  $\nu$  i la velocitat,  $\lambda\nu = v$ , podem escriure l'argument de la funció d'ona plana com:

$$vt \pm \vec{r}\vec{s} = \frac{1}{k}(\omega t \pm k\vec{r}\vec{s}). \tag{2.9}$$

Depenent del cas que s'estudii, la funció  $f$  pot ser complicada de descriure. El *teorema de Fourier* afirma que qualsevol funció pot ser descrita com a combinació lineal de funcions harmòniques. Per aquesta raó, prendrem funcions d'ona harmòniques com a descripció dels camps elèctric i magnètic, per exemple:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k\vec{r}\vec{s}) \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - k\vec{r}\vec{s}), \quad (2.10)$$

on els mòduls  $\|\vec{E}_0\|$  i  $\|\vec{H}_0\|$  són les amplituds màximes dels camps elèctric i magnètic, respectivament. L'argument d'aquestes funcions és adimensional. Per comoditat, a l'hora de fer manipulacions matemàtiques escriurem els camps en notació complexa, encara que només la seva part real (o imaginària) té interès físic, és a dir:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s})) \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s})) \quad (2.11)$$

on  $\vec{E}_0$  és l'amplitud de l'ona i  $\exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s}))$  la seva fase, que també es pot escriure en termes de l'índex de refracció. Si definim  $p = \omega/c$ , tindrem que

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s})) \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s})). \quad (2.12)$$

Definim el concepte de *front d'ona* com el lloc geomètric dels punts que tenen la mateixa fase, en un moment donat. En el cas d'ones planes, el front d'ona és el pla  $k\vec{r}\vec{s} = C$ , on  $C$  és una constant. És possible establir una relació entre els conceptes de *fase* i *camí òptic* ( $\Delta = nl$ , on  $n$  és l'índex de refracció). La diferència de fase entre dos plans '1' i '2' del front d'ona, situats a distància  $l$  entre si, és

$$(\omega t - k\vec{r}_2\vec{s}) - (\omega t - k\vec{r}_1\vec{s}) = k(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\vec{s} = kl. \quad (2.13)$$

Si l'ona es propaga en un medi d'índex  $n$ ,  $kl = (k/n)nl = (k/n)\Delta$ . Aquest resultat s'utilitzarà més endavant en l'estudi dels sistemes interferencials. Una altra solució de l'equació d'ona que presenta un gran interès és aquella en què el valor de l'amplitud de l'ona només depèn de la distància al punt en què es genera. En aquest cas (ona esfèrica), és convenient escriure l'equació d'ones en coordenades esfèriques, i prendre només la part radial, és a dir,  $\vec{E} = \vec{E}(r, t)$ :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \vec{E}}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.14)$$

I podem escriure

$$\frac{\partial^2 r \vec{E}}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 r \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.15)$$

Aquesta darrera expressió és formalment idèntica a l'equació d'ones en una dimensió escrita en coordenades cartesianes. Per tant, la solució en aquest cas serà del tipus

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}(vt \pm r)}{r}. \quad (2.16)$$

En aquest cas, el front d'ones és una esfera.

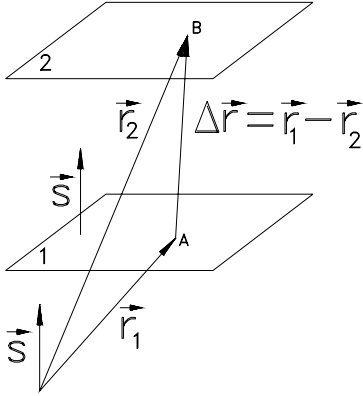


Figura 2.1: Diferència de fase

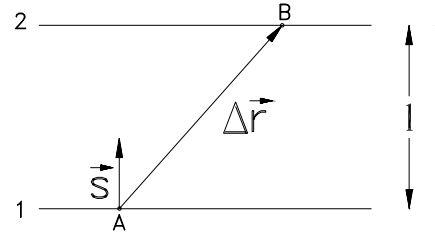


Figura 2.2: Diferència de fase (esquema transversal)

### 2.1.3 Energia. Vector de Poynting

Introduint les solucions de l'equació d'ones per als camps elèctric i magnètic a les equacions de Maxwell, podem deduir les relacions següents :

$$\vec{s} \wedge \vec{H} = -n\vec{E} \quad \vec{s} \wedge \vec{E} = \frac{\vec{H}}{n}, \quad (2.17)$$

relacions que indiquen que els vectors camp elèctric i camp magnètic, i el vector  $\vec{s}$  són ortogonals entre si. Els vectors camps elèctric i magnètic vibren en un pla que es propaga segons la direcció  $\vec{s}$ , tal i com es mostra a la figura 2.3.

L'energia electromagnètica emmagatzemada en un diferencial de volum s'escriu

$$du = \left[ \frac{1}{8\pi} (\epsilon \|\vec{E}\|^2 + \mu \|\vec{H}\|^2) \right] dv, \quad (2.18)$$

i, per tant, la variació per unitat de temps d'energia electromagnètica emmagatzemada en un volum V que tanca una superfície S és

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_V \left[ \frac{1}{8\pi} (\epsilon \|\vec{E}\|^2 + \mu \|\vec{H}\|^2) \right] dv \right]. \quad (2.19)$$

Considerem un material dielèctric ideal ( $\sigma = 0$ ). Fent servir les equacions de Maxwell podem demostrar que la variació d'energia anterior pot expressar-se com

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi} \int_S \vec{E} \wedge \vec{H} ds. \quad (2.20)$$

Definim el *vector de Poynting* com

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{H}. \quad (2.21)$$

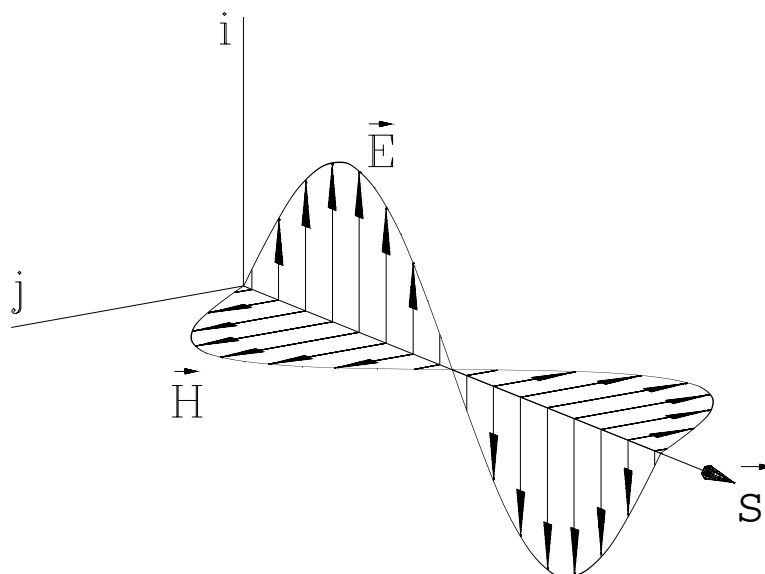


Figura 2.3: Transversalitat dels camps elèctric i magnètic

El vector de Poynting expressa la variació d'energia radiada per unitat de temps i de superfície perpendicular a la direcció de propagació. Cal observar que en medis homogenis i isòtrops el vector de Poynting i el vector  $\vec{s}$  tenen la mateixa direcció. Si aquesta ona correspon al visible (350-700 nm) el període de vibració és aproximadament de  $10^{-14}$  s. Quan posem un detector (cèl·lula fotoelèctrica, càmera de vídeo, ull, etc.) davant una ona electromagnètica, aquest no és capaç de seguir les oscil·lacions i per tant detecta la mitjana temporal del senyal. Així, definim la *intensitat* com la mitjana temporal del vector de Poynting.

$$I = \langle \|\vec{S}\| \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \|\vec{S}\| dt \quad (2.22)$$

Resolent la integral anterior, la intensitat detectada per a ones planes és

$$I = \frac{cn}{8\pi} \|E_0\|^2, \quad (2.23)$$

mentre que per ones esfèriques tenim

$$I = \frac{cn}{8\pi} \frac{\|E_0\|^2}{r^2}, \quad (2.24)$$

resultat conegut com la *lei del quadrat de la distància*.



## 2.2 Polarització

### 2.2.1 L'el·lipse de polarització

Considerem la corba que es genera a  $z = 0$ , a partir de la composició de dos camps elèctrics de la mateixa freqüència, que vibren amb un cert desfasament  $\delta$  entre ells, que viatgen en la mateixa direcció - per conveniència es pren  $\vec{s} = (0, 0, 1)$  - i amb les seves direccions de vibració ortogonals, es a dir:

$$E_x = A_1 \cos(\omega t) \quad E_y = A_2 \cos(\omega t + \delta). \quad (2.25)$$

En fer desaparèixer el paràmetre  $t$  de les fórmules anteriors, obtenim l'equació cartesiana

$$\frac{E_x^2}{A_1^2} + \frac{E_y^2}{A_2^2} - 2 \frac{E_x E_y}{A_1 A_2} \cos(\delta) = \sin^2(\delta), \quad (2.26)$$

que correspon a una el·lipse amb centre a l'origen de coordenades, però amb l'eix major formant un cert angle  $\psi$  amb l'eix  $x$ . Aquest angle es pot trobar a partir de l'expressió

$$\tan(2\psi) = \frac{2A_1 A_2 \cos(\delta)}{A_1^2 - A_2^2}. \quad (2.27)$$

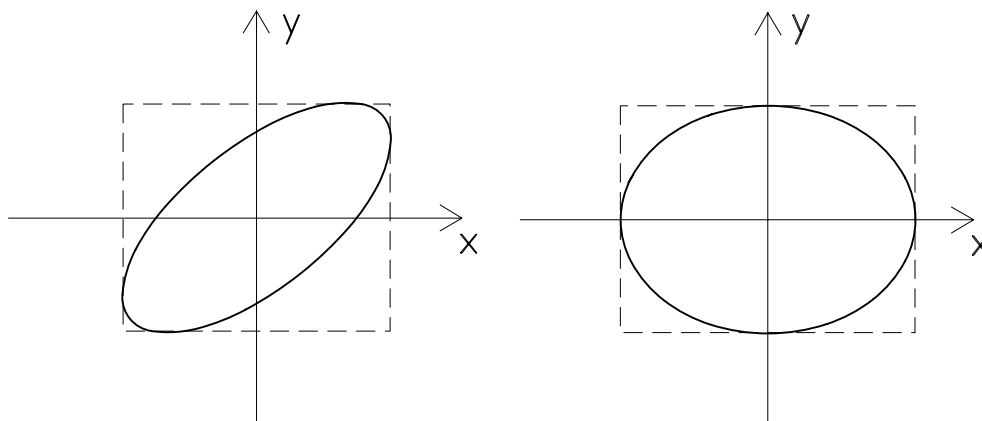


Figura 2.4: Llum polaritzada el·lípticament. La figura mostra dos casos, sense rotació i amb rotació dels eixos de l'el·lipse respecte als eixos de coordenades. En els dos casos, l'el·lipse és a l'interior d'un rectangle de dimensions  $2A_1 \times 2A_2$

El camp elèctric que és combinació dels dos camps elèctrics anteriors s'escriu com

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} A_1 \exp(i(\omega t - kz)) \\ A_2 \exp(i(\omega t - kz + \delta)) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Aquest camp, en propagar-se, genera una espiral de pas el·líptic. Aquesta ona s'anomena *llum polaritzada el·líptica*. El camp magnètic té un comportament equivalent, i es determina a partir de la relació  $\vec{H} = n\vec{s} \wedge \vec{E}$ . Si ara posem un detector normal a la direcció de propagació, la intensitat que detectarem s'obindrà a partir de la mitjana temporal del vector de Poynting. En aquestes condicions determinem que  $H_y = nE_x$  i  $H_x = -nE_y$ ; per tant:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{H} \quad \|\vec{S}\| = \frac{cn}{4\pi} (A_1^2 \cos^2(\omega t) + A_2^2 \cos^2(\omega t + \delta)), \quad (2.29)$$

i calculant la mitjana temporal s'obté

$$I = \frac{cn}{8\pi} (A_1^2 + A_2^2). \quad (2.30)$$

Per tant, la intensitat és la suma directa de les contribucions a la intensitat del camp elèctric segons la direcció  $x$  i del camp elèctric segons la direcció  $y$ .

### 2.2.2 Polarització: casos particulars

Fixem-nos ara en un pla qualsevol  $z = z_0$ . El vector camp elèctric canvia de direcció en funció del temps i la figura que genera l'extrem d'aquest vector es descriu per l'equació 2.26. Considerant els diferents valors que pot prendre  $\delta$ , obtenim els diferents casos de polarització (vegeu la figura 2.5).

Alguns casos d'especial interès:

1. Llum polaritzada lineal:  $\delta = 0$  o bé  $\delta = \pi$ .
2. Eixos de l'el·lipse coincidents amb els eixos de coordenades:  $\delta = \pi/2$  o bé  $\delta = 3\pi/2$ .

Llum polaritzada circular: si a més,  $A_1 = A_2$ .

3. El sentit de gir de l'el·lipse és dextrogir si  $0 < \delta < \pi$ , mentre que el sentit de gir és levogir:  $\pi < \delta < 2\pi$ . Això es pot deduir analitzant l'evolució del vector  $\vec{E}$  en  $t = 0$ .

### 2.2.3 Polaritzadors

En la llum natural (monocromàtica) tots els estats de  $\delta$ ,  $A_1$  i  $A_2$  són equiprobables, és a dir  $\langle \cos(\delta) \rangle = 0$ ,  $\langle A_1^2 \rangle = \langle A_2^2 \rangle$ . Els *polaritzadors* són uns dispositius que permeten obtenir llum polaritzada lineal a partir de llum natural.

Els polaritzadors es caracteritzen per un eix de polarització, que indica la direcció en què la llum surt linealment polaritzada. Si enviem llum polaritzada lineal de manera que el vector camp elèctric vibri en una direcció que formi un angle  $\alpha$  amb l'eix de polarització, la intensitat que es detectarà a la sortida serà  $I \propto \|E_0\|^2 \cos^2(\alpha)$ , resultat conegut com la *llei de Malus*.

Qualsevol dispositiu que modifiqui activament l'estat de polarització de la llum pot ser descrit per una matriu de 4x4 elements (*matriu de Mueller*,  $M$ ). La llum ve descrita per un vector de quatre components (*vector de Stokes*,  $\vec{S}$ ). La llum resultant ( $\vec{S}'$ ) es relaciona amb la inicial a partir de l'expressió  $\vec{S}' = M\vec{S}$ . El vector de Stokes  $\vec{S} = (I, M, C, S)$  es defineix com

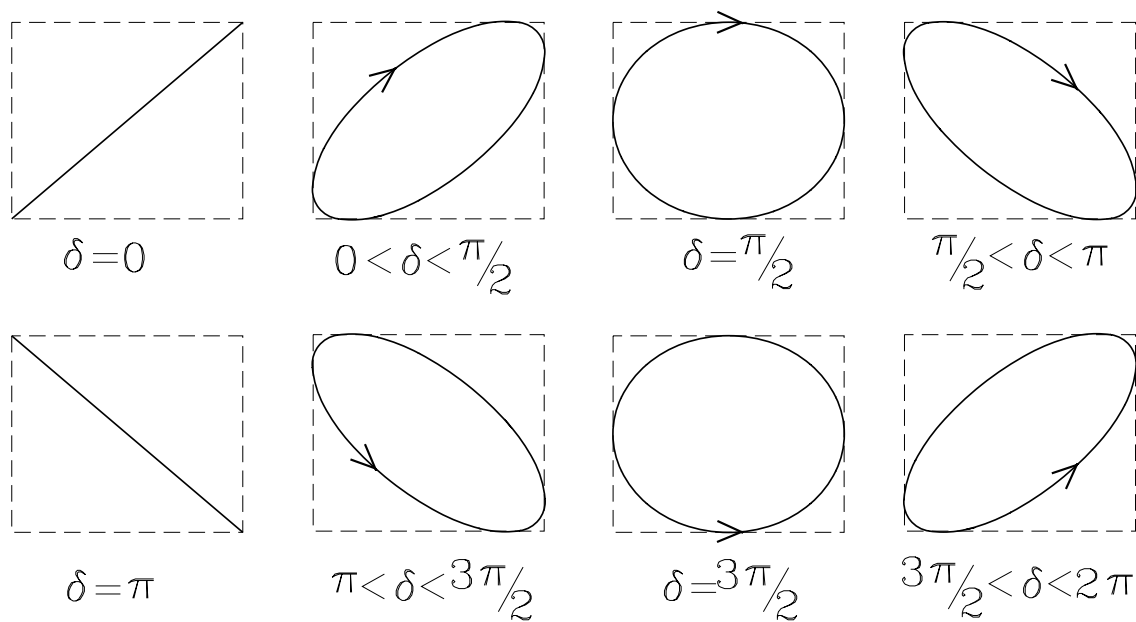


Figura 2.5: Polarització: casos particulars

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} I \\ M \\ C \\ S \end{pmatrix} = \frac{1}{A_1^2 + A_2^2} \begin{pmatrix} A_1^2 + A_2^2 \\ A_1^2 - A_2^2 \\ 2A_1A_2 \cos(\delta) \\ 2A_1A_2 \sin(\delta) \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Alguns exemples:

1. Llum polaritzada lineal segons eix x:  $(1, 1, 0, 0)$ .

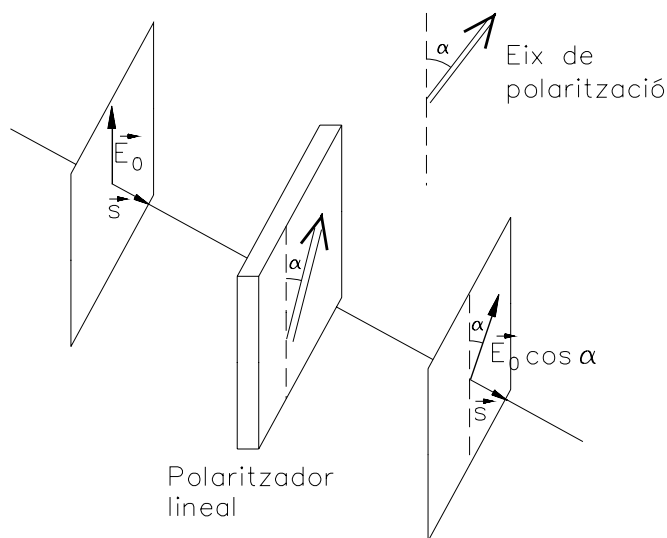


Figura 2.6: Polarització: llei de Malus

2. Llum polaritzada lineal segons eix  $y$ :  $(1, -1, 0, 0)$ .
3. Llum polaritzada circular dextrogira:  $(1, 0, 0, 1)$ .
4. Llum polaritzada circular levogira:  $(1, 0, 0, -1)$ .
5. Llum natural:  $(1, 0, 0, 0)$ .

Un polaritzador lineal, l'eix de polarització del qual forma un angle  $\alpha$  amb l'eix  $y$ , es descriu com

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & 0 \\ \cos(2\alpha) & \cos^2(2\alpha) & \sin(2\alpha)\cos(2\alpha) & 0 \\ \sin(2\alpha) & \sin(2\alpha)\cos(2\alpha) & \sin^2(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

## 2.3 Propagació, reflexió i refracció

### 2.3.1 Deducció de les lleis de l'Òptica Geomètrica

Una ona incideix sobre una superfície que separa dos medis dielèctrics isòtrops d'índexs  $n$  i  $n'$  (vegeu figura 2.7). En interaccionar amb la superfície de separació, part de l'energia torna al primer medi i part de l'energia es transmet al segon. Com que a la superfície de separació es verifiquen les condicions de contorn (equació 2.4) i, en el cas particular que estem considerant, la densitat superficial de càrrega i els corrents superficials són nuls, podem escriure la continuïtat de les components del camp:

$$\text{Components normals: } D_2^n = D_1^n \quad B_2^n = B_1^n \quad (2.33)$$

$$\text{Components tangencials: } E_2^t = E_1^t \quad H_2^t = H_1^t. \quad (2.34)$$

Prenem, per exemple, la continuïtat de la component tangencial  $y$  dels camps elèctrics a la superfície de separació de medis, que per comoditat prendrem a  $z = 0$ ; podem escriure  $E_y + E_y'' = E_y'$ . Desenvolupant aquesta expressió tenim

$$A_y e^{ip(ct-n(\alpha x+\beta y))} + A_y'' e^{ip''(ct-n''(\alpha''x+\beta''y))} = A_y' e^{ip'(ct-n'(\alpha'x+\beta'y))}, \quad (2.35)$$

on  $A_y$ ,  $A_y'$  i  $A_y''$  són les amplituds tangencials dels camps incident, transmès i reflectit,  $p = \omega/c$ ,  $p' = \omega'/c$  i  $p'' = \omega''/c$ . El punt considerat  $(x, y, 0)$  és un punt de la superfície de separació dels medis. Els vectors que indiquen la direcció de propagació de la fase són  $\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $\vec{s}' = (\alpha', \beta', \gamma')$ ,  $\vec{s}'' = (\alpha'', \beta'', \gamma'')$ .

L'expressió de continuïtat s'ha de verificar en qualsevol moment i per a qualsevol punt. Per tant, no pot dependre de les variables espacials o temporals. L'única manera que aquestes no siguin presents a l'equació és que les tres fases siguin iguals i, per tant, que es puguin cancel·lar. Això passa si es verifica:

$pc = p'c = p''c$  : La freqüència no canvia en canviar de medi, ni en produir-se una reflexió. No obstant això, atès que la velocitat de la llum és dependent del medi, la longitud d'ona canvia en canviar de medi. La longitud d'ona d'un camp propagant-se en medi d'índex  $n$  es relaciona amb la longitud d'ona en el buit ( $\lambda_0$ ), mitjançant la relació  $\lambda = \lambda_0/n$ .

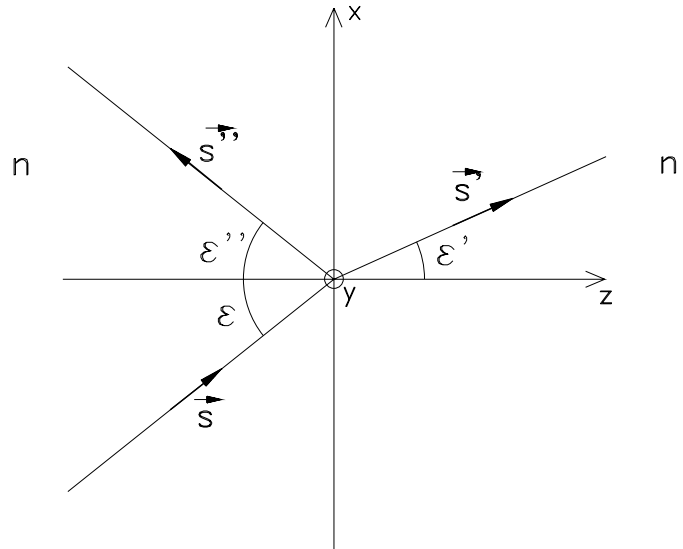


Figura 2.7: Deducció de les lleis de la reflexió i de la refracció

$n\beta = n'\beta' = n\beta''$  : Fent una rotació d'eixos de manera que  $\beta = 0$ , implica necessàriament que  $\beta' = \beta'' = 0$ , amb la qual cosa es prova que el raig incident, el reflectit i el transmès estan en el mateix pla.

$n\alpha = n'\alpha' = n\alpha''$  : Com que la llum que es reflecteix torna al primer medi,  $n = n''$ ; per tant,  $\alpha = \alpha''$ . Projectant aquesta component sobre l'eix  $x$ , tenim que  $\epsilon = \epsilon''$  (lleis de la reflexió). Per altra banda, com que es verifica que  $n\alpha = n'\alpha'$ , tenim  $n \sin(\epsilon) = n' \sin(\epsilon')$  (lleis de la refracció).

### 2.3.2 Fórmules de Fresnel

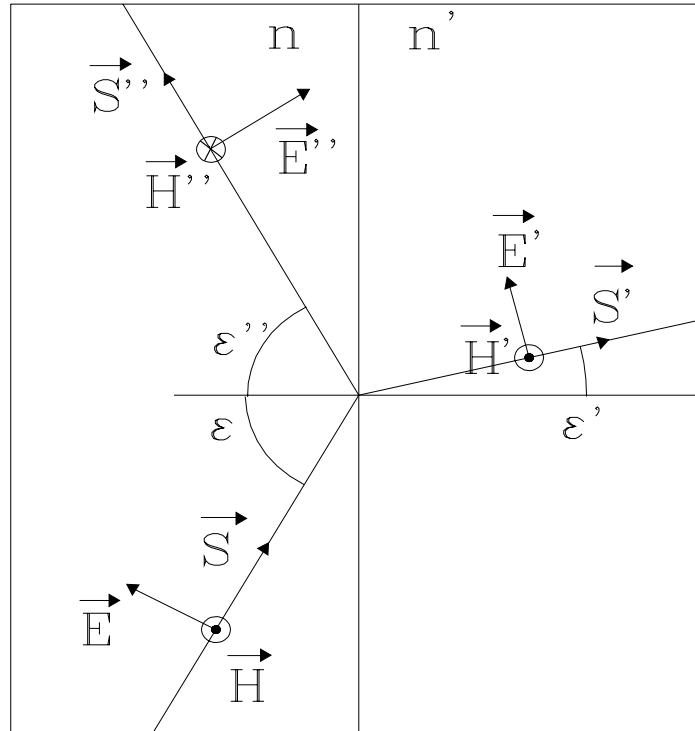
En aquesta secció estudiarem quin valor pren l'amplitud del camp en canviar de medi o reflectir-se, en funció de l'amplitud incident. Prenem un front d'ona que avança segons la direcció  $\vec{s}$ . Considerarem un camp elèctric polaritzat linealment, que vibra en el pla definit pel front d'ona. Per fer la resolució del problema més entenedora, projectarem el vector camp elèctric sobre dos eixos: un eix al pla  $xz$  (eix paral·lel) i un eix perpendicular a l'anterior, i que és paral·lel a l'eix  $y$  (eix perpendicular) i analitzarem cada cas per separat. El pla  $xz$  és el *d'incidència*.

#### Camp $E$ paral·lel al pla d'incidència $\vec{E}_{||}$

Considerem el primer cas, indicat a la figura 2.8. Prenem la projecció del camp elèctric sobre el pla  $xz$ . La direcció del camp magnètic queda definida per la relació  $\vec{H} = n\vec{s} \wedge \vec{E}$ . Com que no hi ha altres camps presents en el problema que puguin modificar la direcció dels camps, les direccions d'aquests són les que es mostren a la figura 2.8. El sentit del camp elèctric és tal que la component  $x$  és positiva. Escriurem els camps de la manera següent:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{||} &= \vec{A}_{||} \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s})) \\ \vec{E}''_{||} &= \vec{A}''_{||} \exp(ip''(ct - n''\vec{r}\vec{s}'')) \\ \vec{E}'_{||} &= \vec{A}'_{||} \exp(ip'(ct - n'\vec{r}\vec{s}')).\end{aligned}\tag{2.36}$$

Per simplificar-ne la nomenclatura prendrem els mòduls  $A_{||} = \|\vec{A}_{||}\|$ ,  $A'_{||} = \|\vec{A}'_{||}\|$  i  $A''_{||} = \|\vec{A}''_{||}\|$ . Per deduir la relació entre les amplituds, operarem de la manera següent:

Figura 2.8: Fórmules de Fresnel. Camp  $E$  paral·lel al pla d'incidència

1. Es projecta la component tangencial ( $x$ ) del camp elèctric i s'hi aplica la condició de continuïtat.
2. Es projecta la component tangencial ( $y$ ) del camp magnètic i s'hi aplica la condició de continuïtat.
3. Es reescriu el camp magnètic en termes del camp elèctric. S'obté un sistema d'equacions lineal amb dues incògnites ( $A'_{||}$  i  $A''_{||}$ ), la solució del qual dóna

$$A'_{||} = A_{||} \frac{2 \sin(\epsilon') \cos(\epsilon)}{\sin(\epsilon' + \epsilon) \cos(\epsilon' - \epsilon)} \quad (2.37)$$

$$A''_{||} = A_{||} \frac{\tan(\epsilon' - \epsilon)}{\tan(\epsilon' + \epsilon)}. \quad (2.38)$$

### Camp $E$ perpendicular al pla d'incidència $\vec{E}_{\perp}$

El segon cas que cal considerar és anàleg a l'anterior, però ara el camp elèctric és perpendicular al pla  $xz$ , segons s'indica a la figura 2.9. El camp elèctric s'ha pres en el sentit positiu de l'eix  $y$ . Operant de la mateixa manera que en cas anterior, s'obté la relació entre l'amplitud dels camps elèctrics transmes i reflectit en funció de l'incident per al cas de polarització perpendicular.

$$A'_{\perp} = A_{\perp} \frac{2 \sin(\epsilon') \cos(\epsilon)}{\sin(\epsilon + \epsilon')} \quad (2.39)$$

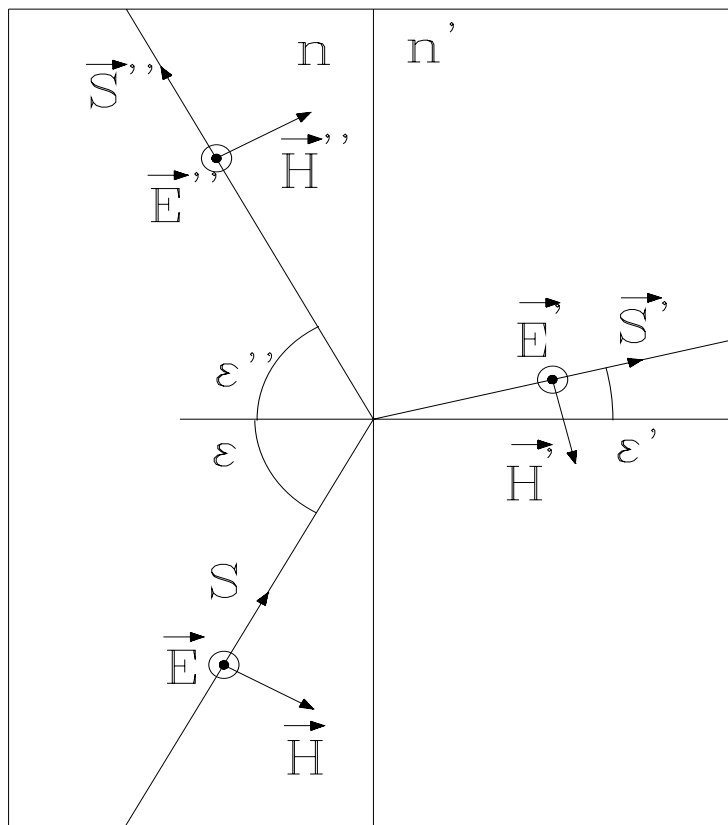


Figura 2.9: Fórmules de Fresnel. Camp  $E$  perpendicular al pla d'incidència

$$A''_{\perp} = A_{\perp} \frac{\sin(\epsilon' - \epsilon)}{\sin(\epsilon + \epsilon')}. \quad (2.40)$$

Les equacions 2.37-2.40 reben el nom de fórmules de Fresnel. Habitualment es treballa amb els coeficients de reflexió ( $r_{\perp}$  i  $r_{\parallel}$ ) i transmissió ( $t_{\perp}$  i  $t_{\parallel}$ ), que es defineixen :

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \frac{A''_{\parallel}}{A_{\parallel}} & t_{\parallel} &= \frac{A'_{\parallel}}{A_{\parallel}} \\ r_{\perp} &= \frac{A''_{\perp}}{A_{\perp}} & t_{\perp} &= \frac{A'_{\perp}}{A_{\perp}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

### 2.3.3 Anàlisi dels coeficients de transmissió i reflexió

A continuació es mostra la variació dels quatre coeficients de Fresnel en funció de l'angle d'incidència  $\epsilon$ . Alguns casos d'interès són:

- Incidència normal ( $\epsilon = 0$ ):

$$t_{\parallel} = t_{\perp} = \frac{2n}{n + n'} \quad (2.42)$$

$$r_{\parallel} = r_{\perp} = \frac{n - n'}{n + n'}. \quad (2.43)$$

- Angle de Brewster. Tenim incidència amb angle de Brewster quan  $A''_{\parallel} = 0$ . En aquest cas la component reflectida està polaritzada segons la direcció perpendicular. Això passa quan

$$\tan(\epsilon_B) = \frac{n'}{n}. \quad (2.44)$$

- Angle límit: angle d'incidència pel qual  $\epsilon' = \pi/2$ :

$$\sin(\epsilon_l) = \frac{n'}{n}. \quad (2.45)$$

Aquest angle només té sentit quan  $n' < n$ .

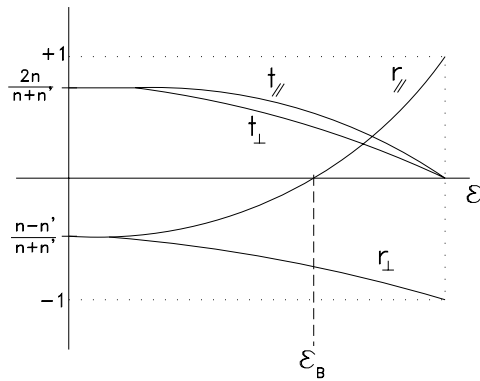


Figura 2.10: Coeficients de transmissió i reflexió. Cas  $n = 1$  i  $n' = 1.5$

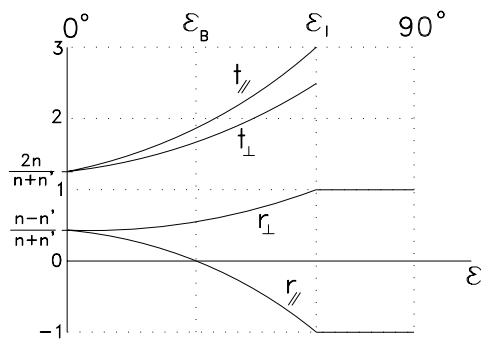


Figura 2.11: Coeficients de transmissió i reflexió. Cas  $n = 1.5$  i  $n' = 1$

Qüestions interessants que podem extreure de l'anàlisi de les figures:

- En incidència normal i per a valors petits de l'angle d'incidència, els coeficients de reflexió paral·lel i perpendicular són iguals. El mateix passa amb els coeficients de transmissió.
- Valors negatius. La presència d'aquests valors en els coeficients indica que el sentit que es va atribuir als camps en fer la deducció de les fórmules de Fresnel no és apropiat en aquest cas.
- Per a angles superiors al límit, no existeix ona transmesa.
- L'amplitud transmesa pot superar el valor de la incident. Això no viola cap principi de conservació, ja que l'amplitud no és l'energia, la qual, òbviament, sí que es conservarà.

Es pot comprovar que

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= -r'_{\parallel} & r_{\perp} &= -r'_{\perp} \\ t_{\parallel}t'_{\parallel} &= 1 - r_{\parallel}^2 & t_{\perp}t'_{\perp} &= 1 - r_{\perp}^2, \end{aligned} \quad (2.46)$$



on els factors  $r_{||}$ ,  $t_{||}$ ,  $r_{\perp}$  i  $t_{\perp}$  han estat calculats fent el pas de  $n$  a  $n'$  mentre que els factors  $r'_{||}$ ,  $t'_{||}$ ,  $r'_{\perp}$  i  $t'_{\perp}$  es calculen fent el pas en sentit invers, és a dir, de  $n'$  a  $n$ .

### Estudi dels casos d'incidència rasant i normal

L'estudi dels canvis de signe en el factor de reflexió paral·lel s'ha de fer amb cura. Analitzarem els casos extrems d'incidència rasant ( $\epsilon = \pi/2$ ) i incidència normal ( $\epsilon = 0$ ); considerarem les figures 2.8 i 2.9.

- CAS A:  $n < n'$ :
  - Incidència normal. Els coeficients de reflexió paral·lel i perpendicular són negatius; el vector camp elèctric reflectit apunta sempre en sentit contrari al del dibuix (vegeu les figures 2.9 i 2.8). Observem que entre el camp incident i el reflectit hi ha un canvi de fase  $\pi$  per als dos casos ( $||$  i  $\perp$ ).
  - Incidència rasant. El coeficient paral·lel és positiu; per tant, el sentit del vector és correcte. En el cas perpendicular el sentit no és correcte. Per tant, el camp incident i el reflectit estan sempre en oposició de fase. D'aquí, i interpolant els casos intermedis, es pot inferir que sempre tenim un canvi de fase  $\pi$  en la reflexió.
  - Transmissió. Els coeficients són sempre positius. No hi ha cap canvi en l'orientació dels vectors. En vista de com estan disposats podem assegurar que no hi ha canvi de fase  $\pi$ .
- CAS B:  $n > n'$ : Fent el mateix raonament que en el cas anterior, podem assegurar que, en aquestes condicions, mai no es produeix un salt de fase  $\pi$ , ni en reflexió ni en refracció.

### 2.3.4 Factors de transmissió i reflexió en intensitat

Definim els *factors de transmissió* com el quocient entre la intensitat transmesa i la incident. Cal definir un factor per a la component paral·lela i un altre per a la perpendicular. Recordem que la *intensitat* es defineix com la mitjana temporal de l'energia radiada per unitat de temps i de superfície. La definició d'intensitat exigeix, a més, que la detecció es faci amb un detector situat normalment a la direcció de propagació. Recordem que la intensitat detectada val  $I = \frac{cn}{8\pi} A^2$ .

Considerem la situació de la figura 2.12. Una ona plana incideix sobre una superfície de separació de medis amb un angle  $\epsilon$  respecte a la normal i es refracta formant un angle  $\epsilon'$ . La comparació entre els vectors de Poynting es farà a la superfície de separació dels medis, aplicant el principi de conservació de l'energia.  $\|\vec{S}\| \cos(\epsilon)$  és l'energia que incideix per unitat de superfície. Anàlogament,  $\|\vec{S}'\| \cos(\epsilon')$  és l'energia transmesa. Per tant, el factor de transmissió en intensitat de la component paral·lela serà

$$T_{||} = \frac{I'_{||}}{I_{||}} = \frac{\langle \|\vec{S}'_{||}\rangle \cos(\epsilon')}{\langle \|\vec{S}_{||}\rangle \cos(\epsilon)} = \frac{A'^2_{||} n' \cos(\epsilon')}{A^2_{||} n \cos(\epsilon)} \quad (2.47)$$

i, per a la component perpendicular,

$$T_{\perp} = \frac{A'^2_{\perp} n' \cos(\epsilon')}{A^2_{\perp} n \cos(\epsilon)}. \quad (2.48)$$

Quant a la component reflectida, ara  $\epsilon = \epsilon''$  i  $n = n''$ , i per tant es pot escriure

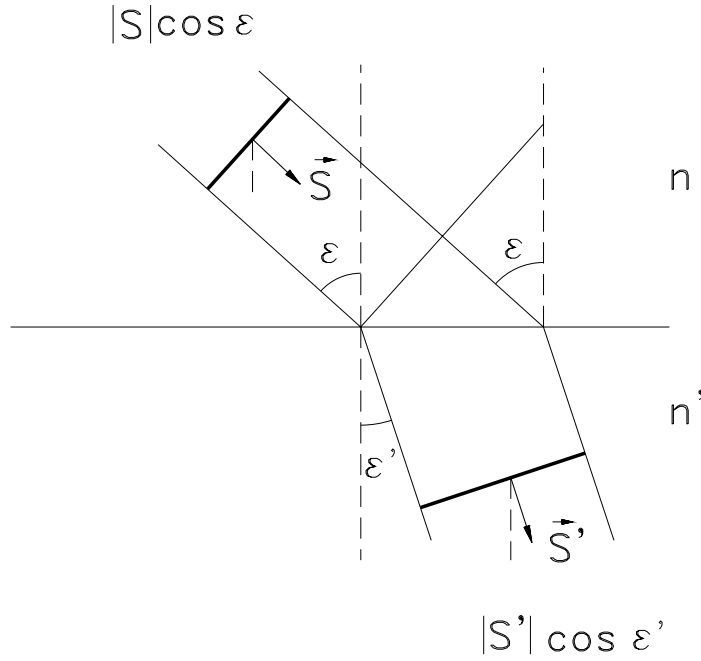


Figura 2.12: Obtenció dels factors de transmissió en intensitat

$$R_{\parallel} = \frac{A'_{\parallel}{}^2}{A_{\parallel}^2} \quad R_{\perp} = \frac{A'_{\perp}{}^2}{A_{\perp}^2}. \quad (2.49)$$

S'ha de verificar que

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \quad R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \quad (2.50)$$

i, en el cas d'incidència normal,

$$T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{4nn'}{(n+n')^2} \quad R_{\parallel} = R_{\perp} = \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2. \quad (2.51)$$

### 2.3.5 Estudi de la reflexió total

Quan la llum arriba a una superfície de separació de medis ( $n' < n$ ), amb un angle superior a l'angle límit, tota la llum torna al primer medi. Recordem que l'angle límit s'obté quan es verifica  $n \sin(\epsilon) = n' \sin(\pi/2)$ . Definim  $N$  com,  $N = \sin(\epsilon) = n'/n$ .

La llei de Snell té un clar significat geomètric quan treballem amb medis dielèctrics i en les condicions habituals. Podem fer la hipòtesi següent: la llei de la refracció té una validesa formal més enllà del seu significat intuïtiu. Considerem una ona plana incident sobre una superfície de separació de medis amb un angle  $\epsilon > \epsilon_l$  i  $n > n'$ . Si acceptem la validesa formal de la llei de Snell podem escriure  $\sin(\epsilon') = \sin(\epsilon)/N$ . Noteu que  $\sin(\epsilon') > 1$ , i per tant el valor de  $\cos(\epsilon')$  és

$$\cos(\epsilon') = \pm \frac{i}{N} \sqrt{\sin^2(\epsilon) - N^2}, \quad (2.52)$$

on  $\cos(\epsilon')$  és una magnitud imaginària. Més endavant, per consideracions de conservació de l'energia es menysprearà el signe  $+$ . Coneixent el valor del  $\sin(\epsilon')$  i del  $\cos(\epsilon')$  podem aplicar les fórmules de Fresnel. Analitzant la figura 2.11 es pot comprovar que els factors de reflexió perpendicular i paral·lel prenen els valors 1 i  $-1$  respectivament, per a angles d'incidència superiors al límit. Podem estudiar amb més detall els valors de l'angle d'incidència. Les fórmules del factor de reflexió per als dos casos de polarització són:

$$r''_{\parallel} = \frac{\tan(\epsilon' - \epsilon)}{\tan(\epsilon' + \epsilon)}$$

$$r''_{\perp} = \frac{\sin(\epsilon' - \epsilon)}{\sin(\epsilon' + \epsilon)}.$$

Com que coneixem els valors de  $\sin(\epsilon)$ ,  $\cos(\epsilon)$ ,  $\sin(\epsilon')$  i  $\cos(\epsilon')$ , podem posar les fórmules de Fresnel en termes d'aquests valors coneguts. Després de fer unes quantes operacions obtenim que

$$r''_{\parallel} = -e^{i\phi(\epsilon, n, n')} \quad r''_{\perp} = e^{i\theta(\epsilon, n, n')}. \quad (2.53)$$

Es tracta d'un resultat interessant: els coeficients de reflexió són complexos i de mòdul 1. L'ona reflectida paral·lela tindrà per equació

$$\vec{E}''_{\parallel} = \vec{A}_{\parallel} r''_{\parallel} \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s}'')) = \vec{A}_{\parallel} \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s}'') + i\phi), \quad (2.54)$$

mentre que la component perpendicular serà

$$\vec{E}''_{\perp} = \vec{A}_{\perp} r''_{\perp} \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s}'')) = -\vec{A}_{\perp} \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s}'') + i\theta). \quad (2.55)$$

Per tant, l'ona reflectida estarà polaritzada el·lípticament i les seves components desfasades  $\phi - \theta$ . Aquest desfasament depèn de  $n$  i  $n'$  i pot variar en funció de l'angle d'incidència  $\epsilon$ .

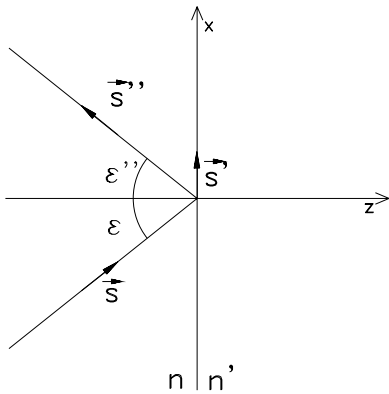


Figura 2.13: Reflexió total

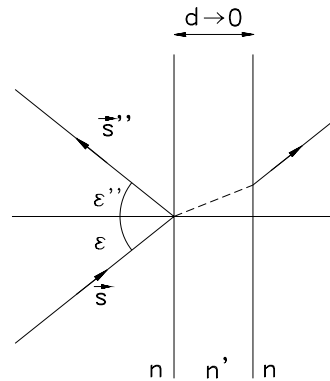


Figura 2.14: Reflexió total frustrada

Té sentit parlar de llum transmesa? A primera vista, i atès que tota la llum torna al primer medi, sembla una pregunta sense sentit. No obstant això, escrivim l'ona en el segon medi:

$$\vec{E}' = \vec{A}' \exp(ip(ct - n' \vec{r} \vec{s}')) = \vec{A} \exp(ip(ct - n'(x \sin(\epsilon') + z \cos(\epsilon')))). \quad (2.56)$$

També podem escriure el valor de  $\sin(\epsilon')$  i  $\cos(\epsilon')$  en termes del  $\sin(\epsilon)$ ,

$$\vec{E}' = \vec{A} \exp \left( ip \left( ct - n' \left( x \frac{\sin(\epsilon)}{N} + z \left( \frac{-i}{N} \sqrt{\sin^2(\epsilon) - N^2} \right) \right) \right) \right) \quad (2.57)$$

i operant,

$$\vec{E}' = \vec{A} \exp \left( - \frac{pn' \sqrt{\sin^2(\epsilon) - N^2}}{N} z \right) \exp \left( ip \left( ct - x \frac{n' \sin(\epsilon)}{N} \right) \right). \quad (2.58)$$

La interpretació d'aquesta equació és la següent:

- El terme d'amplitud presenta una caiguda exponencial ràpida a mesura que penetrem en el segon medi. Menyspreem el signe + de l'exponencial real ja que es tracta d'una solució sense sentit físic, que donaria lloc a una ona que augmentaria indefinidament la seva amplitud.
- La direcció del vector de fase és  $\vec{s} = (1, 0, 0)$ : l'ona es propaga en la direcció de la interfase dels dos medis.

El model demostra l'existència d'una ona que penetra unes longituds d'ona en el segon medi. Això es corrobora experimentalment amb un fenomen denominat *reflexió total frustrada* o *efecte túnel òptic*: quan el segon medi és una làmina de gruix molt petit, i s'envia una ona amb un angle superior al límit, es pot observar que aquesta es transmet completament sense reflectir-se. L'explicació satisfactòria d'aquest fenomen cal buscar-la en la Física Quàntica, que elimina la inconsistència del nostre raonament: l'ona de la interfase és la mateixa que després detectem com a reflectida.

## 2.4 Òptica de medis conductors

### 2.4.1 Propagació en medis conductors

Considerem un medi que presenta conductivitat  $\sigma \neq 0$ . Els metalls tenen valors de  $\sigma$  molt alts, però els dielèctrics reals també poden tenir conductivitats diferents de zero. En un medi com aquest, no magnètic ( $\mu = 1$ ) i sense densitat volumètrica de càrrega ( $\rho = 0$ ), les equacions de Maxwell s'escriuen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0, \end{aligned} \quad (2.59)$$

on  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . Si assagem una solució de tipus ona harmònica,  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k \vec{r} \vec{s})}$ , aleshores

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k \vec{r} \vec{s})} = i\omega \vec{E}; \quad (2.60)$$

per tant, la primera equació de Maxwell es pot escriure com

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \left(-\frac{4\pi\sigma}{\omega}i + \epsilon\right) \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.61)$$

que és formalment idèntica a l'equació de Maxwell que s'aplica en el cas de medis dielèctrics. És necessari fer la identificació de la permeabilitat dielèctrica  $\epsilon$  amb una funció de la permeabilitat generalitzada  $\hat{\epsilon} = \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{c}i$ . Si  $\sigma = 0$ , obtenim de nou la permeabilitat ordinària dels medis dielèctrics ideals. Podem calcular també l'índex de refracció generalitzat  $\hat{n}$ , a partir de la relació  $\hat{n}^2 = \hat{\epsilon}$ . L'índex complex és  $\hat{n} = n - i\kappa$ , on  $n$  és l'índex de refracció ordinari i  $\kappa$  és l'anomenat *coeficient d'extinció*. Identificant termes podem escriure

$$\begin{aligned} n &= \left[ \frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \frac{4\pi^2\sigma^2}{\omega^2}} \right]^{1/2} \\ \kappa &= \left[ -\frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \frac{4\pi^2\sigma^2}{\omega^2}} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

En el cas particular en què  $\sigma/\omega \gg \epsilon$ , aleshores

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{2\pi\sigma/\omega}, \quad (2.63)$$

fórmula coneguda com la *relació de Drude*.

La solució a l'equació d'ones en un medi amb  $\sigma \neq 0$  serà

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ip(ct - \hat{n}\vec{r}\vec{s})} = \vec{E}_0 e^{-\kappa p\vec{r}\vec{s}} e^{ip(ct - n\vec{r}\vec{s})}. \quad (2.64)$$

Veiem que és una equació similar a la que s'obté quan les ones es propaguen lliurement en un medi dielèctric. No obstant això, l'amplitud decau exponencialment a mesura que l'ona es propaga.

Analitzem ara com es transmet una ona electromagnètica des d'un medi dielèctric a un medi metàl·lic. En aquesta secció farem servir els angles  $\theta$  i  $\theta'$  per referir-nos als angles d'incidència i refracció, i evitar confusions amb la permeabilitat dielèctrica  $\epsilon$ . Aplicant-hi les condicions de continuïtat e un canvi de medi, podríem deduir de nou la fórmula de Snell de la refracció, aplicable en aquest cas. El que obtindríem és una expressió d'aspecte familiar:

$$n \sin(\theta) = \hat{n}' \sin(\hat{\theta}'), \quad (2.65)$$

però notablement diferent quant a la seva interpretació. Ara, l'índex del segon medi és complex i  $\hat{\theta}'$  és un valor també complex. Notem que el producte  $\hat{n}' \sin(\hat{\theta}')$  és real, però  $\hat{n}' \cos(\hat{\theta}')$  =  $a - bi$ , en general, no ho serà. L'ona en el segon medi s'escriurà

$$\vec{E}' = \vec{E}_0 e^{ip(ct - \hat{n}'\vec{r}\vec{s})} = \vec{E}_0 \exp(ip(ct - \hat{n}'(x \sin(\hat{\theta}') + z \cos(\hat{\theta}')))), \quad (2.66)$$

i operant ens quedarà

$$\vec{E}' = \vec{E}_0 e^{ip(ct - \hat{n}' \vec{r} \vec{s})} = \vec{E}_0 e^{ip(ct - (xn \sin(\theta) + za))} e^{-pbz}. \quad (2.67)$$

L'ona s'esmorteix ràpidament a mesura que penetra en el medi amb conductivitat. A més, l'ona es propaga en la direcció física  $\vec{s}' = (n \sin(\theta), 0, a)$ . Per tant l'angle físic de refracció és

$$\tan(\theta') = \frac{n \sin(\theta)}{a}. \quad (2.68)$$

Per altra banda, la major part de la llum es reflecteix. Per exemple, si calculem el factor de reflexió  $R$  per incidència normal des de l'aire a un metall, s'obté

$$R = \left\| \frac{1 - \hat{n}}{1 + \hat{n}} \right\|^2 \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma T}} \approx 1. \quad (2.69)$$

Això explica la raó per la que s'utilitzen recobriments metàl·lics per fabricar miralls.

## 2.5 Òptica de medis anisòtrops

### 2.5.1 Nomenclatura

Els medis anisòtrops es caracteritzen perquè presenten propietats òptiques diferents segons la direcció considerada. Això és típic dels materials cristal·lins. En general, el vector camp elèctric  $\vec{E}$  i el vector desplaçament  $\vec{D}$  estan relacionats per la relació  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , on  $\epsilon$  és un tensor de dimensió 3x3. És possible demostrar que aquest tensor és simètric, i per tant, diagonalitza en una certa base de vectors ortogonals:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Podem definir el tensor d'índexs,

$$\begin{pmatrix} n_x & 0 & 0 \\ 0 & n_y & 0 \\ 0 & 0 & n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon_x} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\epsilon_y} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\epsilon_z} \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

així com les velocitats principals,

$$v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}} \quad v_y = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}} \quad v_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}}. \quad (2.72)$$

Aquestes variables contenen informació de la física del problema i s'analitzaran amb detall més endavant.

### 2.5.2 Equacions de Maxwell. Solucions

Considerem un medi dielèctric anisòtrop, no magnètic ( $\mu = 1$ ), sense conductivitat ( $\sigma = 0$ ) ni densitat de càrrega ( $\rho = 0$ ). En aquestes condicions, les equacions de Maxwell s'escriuen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0\end{aligned}\tag{2.73}$$

La solució d'ones planes per a aquestes equacions serà

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s})) \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s})) \\ \vec{D} &= \vec{D}_0 \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s})),\end{aligned}\tag{2.74}$$

on  $n = \frac{c}{v_n}$  és l'índex de refracció i  $v_n$  és la velocitat de fase. Introduint aquestes solucions a les equacions de Maxwell, i fent les derivades espacials i temporals corresponents, obtenim les condicions següents:

$$\begin{aligned}n(\vec{H} \wedge \vec{s}) &= \vec{D} \\ n(\vec{s} \wedge \vec{E}) &= \vec{H} \\ \vec{H}\vec{s} &= 0 \\ \vec{D}\vec{s} &= 0.\end{aligned}\tag{2.75}$$

De cada equació se'n dedueix una condició:

1.  $\vec{D}$  és perpendicular al pla format per  $\vec{H}$  i  $\vec{s}$ .
2.  $\vec{H}$  és perpendicular al pla format per  $\vec{s}$  i  $\vec{E}$ .
3.  $\vec{H}$  i  $\vec{s}$  són perpendiculars.
4.  $\vec{D}$  i  $\vec{s}$  són perpendiculars.

A més, combinant aquestes quatre equacions i fent desaparèixer el camp magnètic, podem escriure

$$\vec{D} = n^2(\vec{E} - \vec{s}(\vec{E}\vec{s})).\tag{2.76}$$

Manipulant aquesta equació podem escriure les components del vector  $\vec{D}$ ,

$$D_i = \frac{c^2 \vec{E}\vec{s}}{v_i^2 - v_n^2} s_i,\tag{2.77}$$

d'on es dedueix que la direcció del vector  $\vec{D}$  és constant, i per tant que la llum està linealment polaritzada. Multiplicant  $\vec{D}$  per  $\vec{s}$  es dedueix la relació següent:

$$\frac{s_x^2}{v_x^2 - v_n^2} + \frac{s_y^2}{v_y^2 - v_n^2} + \frac{s_z^2}{v_z^2 - v_n^2} = 0. \quad (2.78)$$

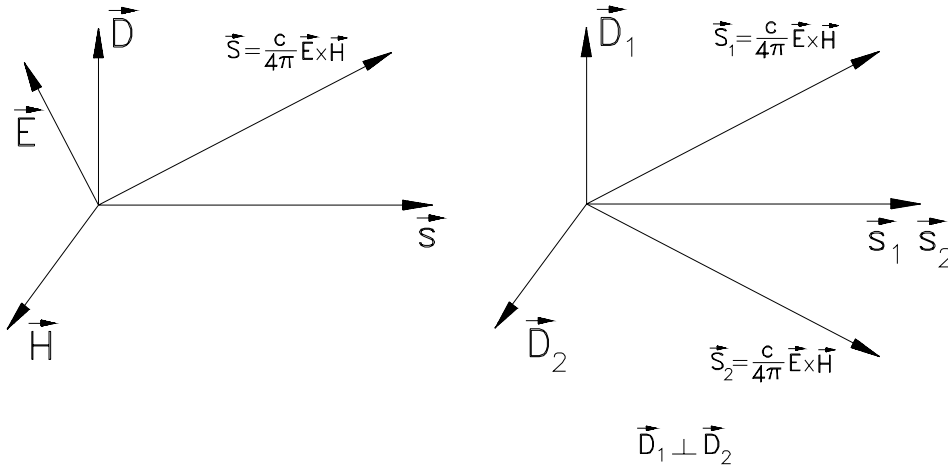


Figura 2.15: Camps propagant-se en un medi anisòtrop

Com podem veure a l'esquerra de la figura 2.15, els vectors  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{s}$  i  $\vec{S}$  es disposen segons s'indica. El vector de Poynting és proporcional al producte vectorial  $\vec{E} \wedge \vec{H}$ . La direcció del raig, i per tant la direcció de propagació de l'energia, no coincideix amb la direcció del vector normal al front d'ona  $\vec{s}$ . L'equació 2.78 aporta molta informació:  $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$  és el vector normal al front d'ona i indica la seva direcció de propagació. Per altra banda,  $v_x$ ,  $v_y$  i  $v_z$  són paràmetres que venen fixats pel medi, ja que s'expressen directament en termes de les components del tensor dielèctric, i  $v_n$  és la velocitat que pot prendre el front d'ona. Fixat el medi i la direcció de propagació  $\vec{s}$ , la fórmula 2.78 esdevé una equació, la incògnita de la qual és  $v_n$ . Es pot comprovar que aquesta equació té dues solucions per a  $v_n$ , que anomenarem  $v_{n1}$  i  $v_{n2}$ . És a dir, per a una direcció de propagació del front d'ona es poden propagar dues ones que viatgen a velocitats diferents. Es pot comprovar que les polaritzacions d'aquestes ones, que notarem  $\vec{D}_1$  i  $\vec{D}_2$ , verifiquen  $\vec{D}_1 \vec{D}_2 = 0$ . Per altra banda, tot i que la direcció de propagació de la fase sigui comuna, la direcció del raig de cada ona és diferent. Aquests resultats es troben resumits a la dreta de la figura 2.15.

**Definició:** les direccions  $\vec{s}$  que verifiquen que  $v_{n1} = v_{n2}$  s'anomenen *eixos òptics*.

Podem distingir tres casos:

$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$	Sistema equivalent a un medi homogeni
$\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$	Sistema uniaxial (un eix òptic)
$\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$	Sistema biaxial (dos eixos òptics)

En el primer cas, els valors de la diagonal del tensor dielèctric són iguals i per tant és com si  $\epsilon$  fos un escalar; es pot assimilar aquest cas a la propagació en un medi homogeni. Això és el que passa amb els materials que cristal·litzen en el sistema cúbic. El segon cas es dona en determinats materials que cristal·litzen segons els sistemes hexagonal, tetragonal o trigonal. Des del punt de vista òptic presenten



la característica de tenir un eix òptic. Els cristalls que no tenen cap direcció de simetria privilegiada i els tres elements del tensor dielèctric són diferents, tenen dos eixos òptics.

### 2.5.3 Medis uniaxials

Ara estudiarem amb més detall els medis uniaxials. Partim de l'equació 2.78. Els medis uniaxials verifiquen que  $\epsilon_x = \epsilon_y$  o, el que és el mateix,  $v_x = v_y$ . Anomenem  $v_x = v_y = v_o$  (velocitat ordinària). En els medis uniaxials l'equació 2.78 pren la forma

$$(v_o^2 - v_n^2) ((v_z^2 - v_n^2) \sin^2(\alpha) + (v_o^2 - v_n^2) \cos^2(\alpha)) = 0, \quad (2.79)$$

on hem escrit el vector  $\vec{s}$  en coordenades esfèriques:

$$\begin{aligned} s_x &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \\ s_y &= \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ s_z &= \cos(\alpha), \end{aligned} \quad (2.80)$$

on  $\alpha$  és l'angle que forma el vector  $\vec{s}$  amb l'eix 'z' i  $\beta$  és l'angle que forma la projecció del vector  $\vec{s}$  sobre el pla  $xy$  amb l'eix 'x'. Aquesta equació té, com ja vam comentar anteriorment, dues solucions, que en aquest cas són

$$\begin{aligned} v_{n1} &= v_o \\ v_{n2}^2 &= v_o^2 \cos^2(\alpha) + v_z^2 \sin^2(\alpha). \end{aligned} \quad (2.81)$$

La primera de les solucions per a la velocitat de fase no depèn de la direcció  $\vec{s}$  considerada i és igual a  $v_o$ . Per tant, la velocitat de fase d'una de les ones serà sempre  $v_o$  (d'igual manera que es propagaria una ona a l'interior d'un dielèctric homogeni i isòtrop). Com a conseqüència d'això, un emissor puntual a l'interior d'un medi anisòtrop uniaxial generaria una ona esfèrica.

La segona de les solucions indica que l'ona es propaga amb velocitats diferents segons la direcció considerada;  $v_{n2}$  és la velocitat extraordinària. La direcció de l'eix òptic la trobarem igualant les dues velocitats de fase obtingudes,  $v_{n1} = v_{n2}$ . Aquesta relació es verifica quan  $\alpha = 0$ , és a dir, quan l'eix òptic coincideix amb la direcció  $z$  (direcció del vector propi del tensor dielèctric corresponent al valor propi  $\epsilon_z$ ). La solució  $v_{n2}$  és l'equació d'una el·lipse, la qual cosa indica que els fronts d'ona associats són el·líptics. Per tant, un emissor puntual a l'interior d'aquest medi generaria una ona, el front d'ona de la qual serà un el·lipsoide de revolució. La figura 2.16 mostra els dos fronts d'ona generats. Existeix una direcció (eix  $z$ ) per la qual els dos fronts d'ona han avançat a la mateixa velocitat: és l'eix òptic.

Un problema interessant que podem estudiar és el comportament d'una ona plana que incideix normalment sobre una làmina planoparal·lela de material anisòtrop uniaxial, com per exemple, la calcita. La figura 2.17 il·lustra l'experiment que estem descrivint. Una ona plana incideix normalment i, per tant, el vector normal al front d'ona  $\vec{s}$  no es desvia en canviar de medi (angle d'incidència,  $0^0$ , angle de refracció  $0^0$ ). A l'interior del medi uniaxial viatjaran dues ones, les polaritzacions de les quals seran normals entre si. La direcció de l'energia ve donada pel vector de Poynting  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{H}$ . Com que una de les ones en un medi uniaxial es comporta com si es propagues en un medi ordinari, la direcció del vector de fase  $\vec{s}$  i la del vector de Poynting són coincidents. En canvi per a l'ona extraordinària, aquests dos vectors tenen

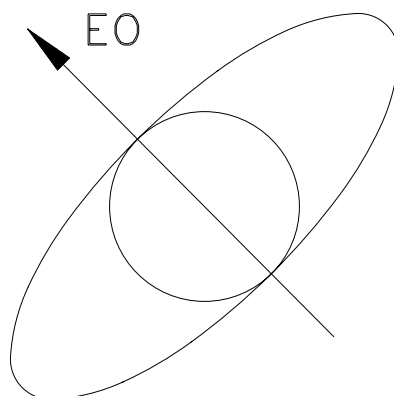


Figura 2.16: Eix òptic i fronts d'ona

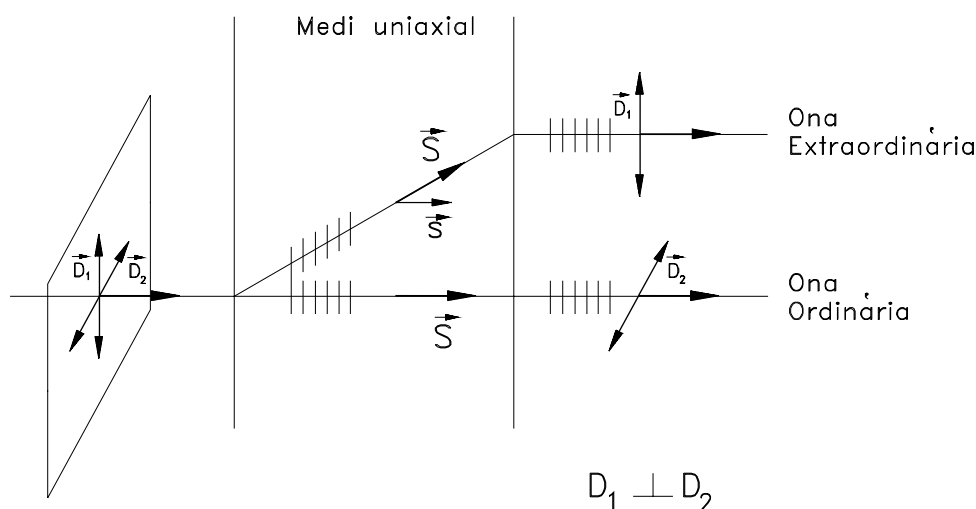


Figura 2.17: Ona ordinària i extraordinària en un medi uniaxial

direccions diferents. A més, aquestes dues ones es propaguen amb velocitats de fase diferents, i per tant existirà un desfasament entre elles.

Quan els fronts d'ona arriben al segon pla de separació de medis es produirà una nova refracció. En el cas de l'ona ordinària, el vector de fase incideix normalment i per tant l'ona no es desvia. Pel que fa a l'ona extraordinària, la direcció del raig forma un cert angle amb la superfície de separació. En canvi el vector de fase incideix normalment sobre aquesta superfície. Com vam veure anteriorment, en deduir la llei de la refracció, aquesta s'aplica sobre la direcció del vector de fase  $\vec{s}$  i no sobre la direcció del raig  $\vec{S}$  (que en el cas dels medis dielèctrics ordinaris són coincidents). Per tant, es tracta també d'incidència normal i consegüentment les dues ones, ordinària i extraordinària, surten amb direccions del vector de Poynting paral·leles.

Visualment, si observem un objecte interposant un cristall de calcita amb cares planoparal·leles, observarem que la imatge es desdobra. Una imatge apareix just en la mateixa posició on és l'objecte (ona

ordinària) i l'altra surt en una altra posició (ona extraordinària). Utilitzant un polaritzador verificariem que aquestes dues ones estan polaritzades linealment i que són normals entre si.

### 2.5.4 Làmines retardadores

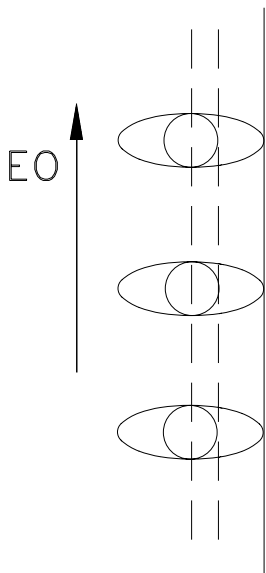


Figura 2.18: Propagació segons una direcció normal a l'eix òptic

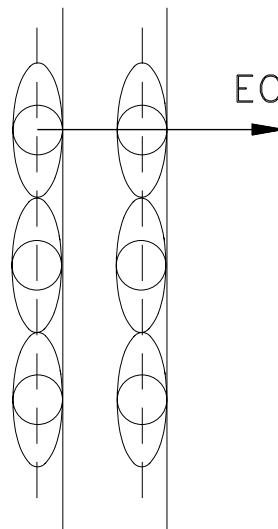


Figura 2.19: Propagació segons l'eix òptic

Un exemple interessant de dispositiu òptic basat en els materials anisòtrops uniaxials són les làmines retardadores. Per una direcció de propagació de la fase donada viatgen dues ones amb polaritzacions perpendiculars entre si. Considerem una làmina planoparal·lela d'un material uniaxial, de gruix  $d$  i tallada de manera que l'eix òptic és paral·lel a les cares de la làmina. En fer incidir normalment sobre aquesta un feix de llum, a l'interior de la làmina es propagaran dues ones: com que es tracta d'un medi uniaxial, l'ona ordinària viatjarà sense canviar de direcció. No obstant això, com que l'eix òptic és paral·lel a les cares, el raig associat a l'ona extraordinària també es propagarà en la mateixa direcció, segons es dedueix de la figura 2.18. Ara bé, els dos raigs assoliran la segona cara de la làmina en moments diferents, ja que l'índex de refracció és diferent per a cadascun d'ells. Per tant, tenim dues ones desfasades amb polaritzacions ortogonals i que viatgen en la mateixa direcció. En general, tindrem llum polaritzada el·lípticament. El desfasament entre les dues components es calcula fent:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n_e d - \frac{2\pi}{\lambda} n_o d. \quad (2.82)$$

Per tant, prenent  $d$  de forma apropiada, podem obtenir làmines que generin, per exemple, un desfasament de  $\pi/2$  entre ambdues components prenent  $d = \lambda/4(n_e - n_o)$  (denominades làmines  $\lambda/4$ ). Les làmines que generen un desfasament  $\pi$  s'anomenen làmines  $\lambda/2$ . Amb làmines  $\lambda/4$  i polaritzadors lineals es pot obtenir llum polaritzada circular.

Si l'eix òptic fos perpendicular a les cares de la làmina, no apreciaríem cap desfasament entre les dues components ja que les dues ones es propaguen a la mateixa velocitat (vegeu figura 2.19).



## Capítol 3

# Interferències

### 3.1 Coherència

#### 3.1.1 Coherència temporal i monocromaticitat

Un sistema físic aïllat (pensem en un àtom, per exemple), amb els seus nivells energètics perfectament definits és una idealització que permet explicar l'existència d'ones monocromàtiques. Si aquest sistema es troba excitat en el nivell d'energia  $W_2$  i passa a un estat d'energia  $W_1$  tal que  $W_2 > W_1$ , la física quàntica prediu que es genera un fotó amb una longitud d'ona verifca  $\lambda_0 = hc/(W_2 - W_1)$ , on  $h$  és la constant de Planck. Si el sistema considerat no és ideal, els seus nivells energètics poden estar degenerats, i els fotons que s'emetin tindran una longitud d'ona que fluctuarà en l'interval  $[\lambda_0 - \Delta\lambda, \lambda_0 + \Delta\lambda]$ . A més, les transicions energètiques possibles entre la banda d'energies 2 i la banda 1 no han de ser equiprobables. Podem definir, per tant, una distribució  $P(\lambda)$  que indica la probabilitat de generar un fotó amb una determinada longitud d'ona. Algunes causes que fan que els nivells energètics estiguin degenerats poden ser l'efecte Doppler, com a conseqüència de l'agitació tèrmica, o bé les col·lisions entre les partícules que formen el material. En aquests casos, la forma de  $P(\lambda)$  és aproximadament com la que mostra la figura 3.1, mentre que en el cas ideal  $P(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$ .

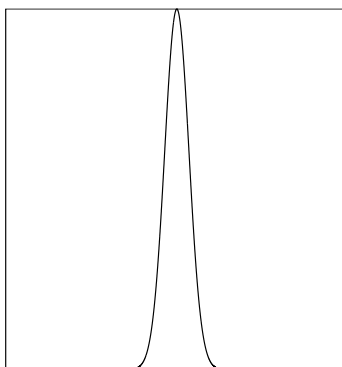


Figura 3.1: Distribució  $P(\lambda)$

El camp elèctric associat a una ona plana ideal és  $\vec{E} = \vec{a} \exp(i(\omega t - kx))$ , on l'amplitud  $|\vec{a}|$  serà constant en valor i direcció. En el cas no ideal, l'ona que obtindrem s'escriurà com a superposició (suma) d'ones monocromàtiques, és a dir:

$$E = \sum_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} a(\lambda) \exp(i(w(\lambda)t - k(\lambda)x)), \quad (3.1)$$

on  $a(\lambda)$  es relaciona directament amb  $P(\lambda)$  i, si la longitud d'ona en el sumatori anterior és una variable contínua, l'equació esdevindrà una integral. Una anàlisi en profunditat de les matemàtiques involucrades en l'expressió anterior ens portaria a un resultat molt interessant: una ona real, suma de diferents contribucions monocromàtiques, està limitada en l'espai, i constitueix el que s'anomena un *paquet d'ones*. La longitud física del paquet d'ones s'anomena *longitud de coherència*,  $l_c$  (vegeu les figures 3.2 i 3.3). Com més monocromàtica és l'ona (es a dir, com més estreta és la distribució  $P(\lambda)$ ), més gran és  $l_c$ : en el límit, una ona plana és perfectament monocromàtica i la seva longitud de coherència és infinita.

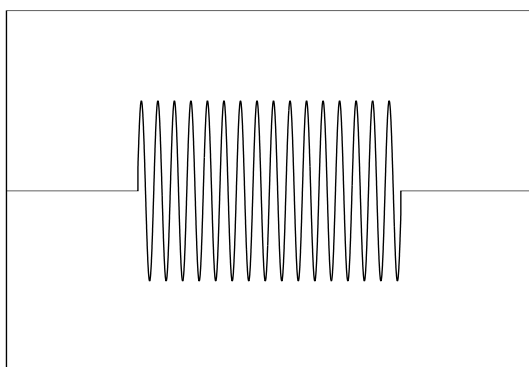


Figura 3.2: Longitud de coherència finita

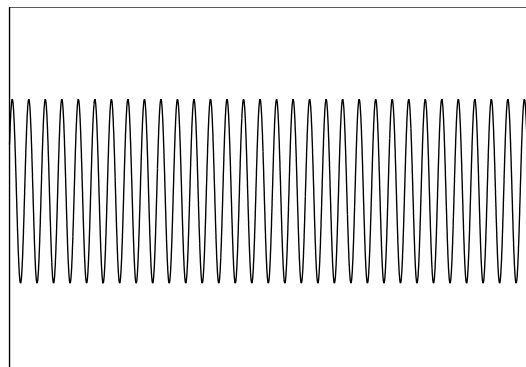


Figura 3.3: Longitud de coherència infinita: ona plana

Quan es genera un paquet d'ones, s'introdueix una fase inicial aleatòria  $\phi$ . Dos paquets d'ones tindran fases inicials diferents. L'ús de sistemes d'il·luminació làser en sistemes interferencials permet eliminar molts dels problemes derivats de la coherència. Els làsers presenten una alta monocromaticitat, la qual cosa vol dir paquets d'ona amb longituds de coherència grans.

### 3.1.2 Condicions per obtenir imatges d'interferència estables

En general, quan dues ones  $\vec{E}_1$  i  $\vec{E}_2$  es troben a l'espai, no interaccionen de manera apreciable. Ara bé, si es verifiquen un seguit de condicions, aquestes ones poden generar una distribució d'intensitat amb zones on l'energia es potencia i d'altres on l'energia disminueix. Les condicions per obtenir imatges d'interferència estables són quatre:

1. Les ones que interfereixen han de ser coherents entre si.
2. Les ones han de tenir la mateixa freqüència.
3. Els camps elèctrics han de ser paral·lels.
4. Els camps han de tenir la mateixa amplitud.

Prenem dues ones planes de polarització, amplitud, freqüència, fase inicial i direcció de propagació diferents, que se superposen en un punt  $P$  de l'espai:

$$\vec{E}_1 = \vec{A}_1 \exp(i(w_1 t - k_1 \vec{r}_P \vec{s}_1 + \phi_1)) \quad \vec{E}_2 = \vec{A}_2 \exp(i(w_2 t - k_2 \vec{r}_P \vec{s}_2 + \phi_2)). \quad (3.2)$$

Si enregistrem la intensitat en aquest punt  $P$  tindrem

$$I \propto \left| \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right|^2 = \left| \vec{A}_1 \exp(i(w_1 t - k_1 \vec{r}_P \vec{s}_1 + \phi_1)) + \vec{A}_2 \exp(i(w_2 t - k_2 \vec{r}_P \vec{s}_2 + \phi_2)) \right|^2, \quad (3.3)$$

i desenvolupant,

$$I \propto \left| \vec{A}_1 \right|^2 + \left| \vec{A}_2 \right|^2 + \left| \vec{A}_1 \right| \left| \vec{A}_2 \right| e^{i(w_1 t - k_1 \vec{r}_P \vec{s}_1 + \phi_1)} e^{-i(w_2 t - k_2 \vec{r}_P \vec{s}_2 + \phi_2)} \cos(\theta_{12}) + \left| \vec{A}_1 \right| \left| \vec{A}_2 \right| e^{-i(w_1 t - k_1 \vec{r}_P \vec{s}_1 + \phi_1)} e^{i(w_2 t - k_2 \vec{r}_P \vec{s}_2 + \phi_2)} \cos(\theta_{12}), \quad (3.4)$$

on  $\theta_{12}$  és l'angle format pels dos vectors camp elèctric. Aquesta intensitat és una funció del temps. Les variacions que presenta aquesta funció seran molt ràpides en el rang de les freqüències òptiques. Per tant, la magnitud que es detectarà serà la mitjana temporal de la intensitat. Per apreciar fenòmens interferencials, han de verificar-se les condicions anteriors:

**Les ones que interfereixen han de ser coherents entre si** . Si els dos feixos de llum que interactuen són incoherents, les fases inicials associades a cada ona aniran canviant aleatòriament. Per tant, la diferència  $\phi_1 - \phi_2$  que apareix en els termes creuats de l'equació 3.4 variarà aleatòriament. Com que la mitjana temporal d'una fase que varia a l'atzar és nul·la els termes creuats de l'equació 3.4 també seran nuls. Aquest problema s'evita quan la diferència  $\phi_1 - \phi_2$  és constant en el temps, és a dir, quan els paquets d'ona són coherents. Això s'aconsegueix a partir d'un únic feix de llum, dividint el feix en dos i fent que cadascun acumuli un camí òptic diferent. Els dos feixos resultants arribaran amb un determinat desfasament, però, si la diferència de camí òptic és inferior a la longitud de coherència, durant una fracció de temps, es verificarà la condició  $\phi_1 - \phi_2 = \text{constant}$  i els dos paquets d'ona se superposaran parcialment (vegeu la figura 3.4). Els paquets d'ona que vinguin a continuació també se superposaran. Els fenòmens d'interferència s'observaran millor si els paquets d'ona són més llargs i se superposen més.

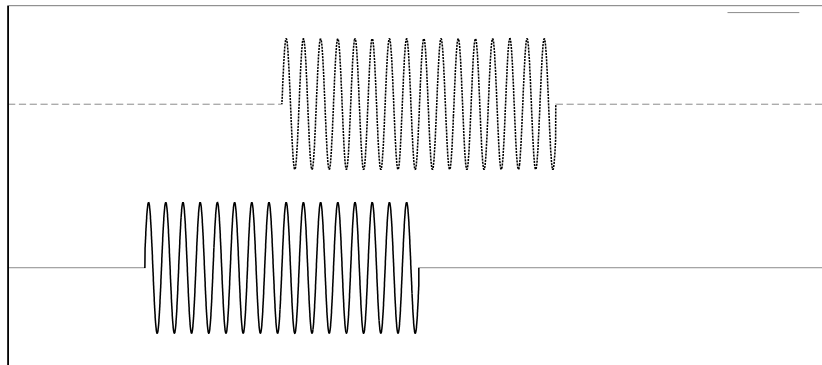


Figura 3.4: Superposició parcial de dos paquets d'ona

**Les ones han de tenir la mateixa freqüència** . Si  $w_1$  i  $w_2$  són diferents, la intensitat dependrà del temps i, en aquest cas, la mitjana temporal també serà zero.

**Els camps elèctrics han de ser paral·lels** . Si els camps elèctrics no són paral·lels, el terme  $\cos(\theta_{12})$  actuarà fent que els termes creuats tinguin una importància menor respecte als termes constants  $\left| \vec{A}_1 \right|^2 + \left| \vec{A}_2 \right|^2$ . En particular, quan les polaritzacions estan en quadratura, els termes creuats desapareixen. Aquest és el cas que correspon a l'estudi de la llum polaritzada. Si  $0 < \theta_{12} < \pi/2$ ,



aleshores se superposa llum polaritzada a les interferències. La situació s'optimitza quan els camps elèctrics són estrictament paral·lels. L'equació 3.4 de la intensitat (verificant-se la condició de coherència, la igualtat de freqüències i el paral·lelisme dels camps) s'escriu ara

$$I \propto A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(k\vec{r}_P(\vec{s}_1 - \vec{s}_2)). \quad (3.5)$$

S'ha prescindit del caràcter vectorial per escriure les amplituds. Això és possible ja que s'ha imposat que els camps elèctrics han de tenir tots la mateixa direcció. La polarització és una informació que no aporta res a la física del problema. Tots els problemes d'òptica on la direcció polarització no és una informació rellevant conformen el que s'anomena com *teoria escalar de la llum*.

**Els camps han de tenir la mateixa amplitud** . Si, a més, l'amplitud dels camps és la mateixa ( $A_1 = A_2 = A$ ), aleshores la distribució d'intensitat s'escriu

$$I \propto 4A^2 \cos^2 \left( \frac{k\vec{r}_P(\vec{s}_1 - \vec{s}_2)}{2} \right). \quad (3.6)$$

Quan es verifiquen les dues primeres condicions, la figura d'interferències és estable. Si a més s'assegura el paral·lelisme dels camps, es pot observar clarament el comportament interferencial. La distribució d'intensitat té un contrast òptim quan, a més, les amplituds de les dues ones que interaccionen són iguals.

## 3.2 Experiment de Young

### 3.2.1 Descripció de l'experiment

Considerem l'experiment següent: dos emissors puntuals  $S_1$  i  $S_2$ , coherents entre si, emeten ones esfèriques amb igual freqüència i polarització. Sigui  $d$  la separació entre les dues fonts. Sigui  $z = -D$  el pla que conté les dues fonts. Considerem un punt d'observació  $P$  situat al pla  $z = 0$  a  $(x, y, 0)$ . Considerem, sense perdre generalitat, que l'índex del medi és  $n = 1$ .

La intensitat que detectarem en aquest punt vindrà donada per l'equació 3.6. Encara que les distàncies  $S_1P$  i  $S_2P$  són diferents, si  $D$  és prou gran, les amplituds de les ones al punt  $P$  es poden considerar iguals. Podem intentar reescriure aquesta equació per fer-la més còmoda d'utilitzar. El producte escalar  $\vec{r}_P(\vec{s}_1 - \vec{s}_2)$  no és més que  $d_1 - d_2$  on  $d_1$  i  $d_2$ , són les distàncies entre les fonts  $S_1$  i  $S_2$  respectivament, i el punt d'observació  $P$ , ( $d_1$ , per exemple, és la projecció del vector  $\vec{r}_p$  segons la direcció fixada per la font  $S_1$  i el punt  $P$ ).  $d_1 - d_2$  és la diferència de camí òptic  $\Delta$ , mentre que  $k(d_1 - d_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2)$  és la diferència de fase. Les fonts  $S_1$  i  $S_2$  es troben als punts  $(-d/2, 0, -D)$  i  $(d/2, 0, -D)$ , respectivament. Aplicant la definició de distància, tenim que

$$d_1 - d_2 = \sqrt{(x + d/2)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{(x - d/2)^2 + y^2 + D^2}. \quad (3.7)$$

En l'experiment de Young es pren la distància d'observació  $D$  molt més gran que la distància entre les fonts  $d$ . Si es verifica aquesta condició,  $d \ll D$  i  $d_1 + d_2 \approx 2D$  i la diferència  $d_1 - d_2$  es pot escriure

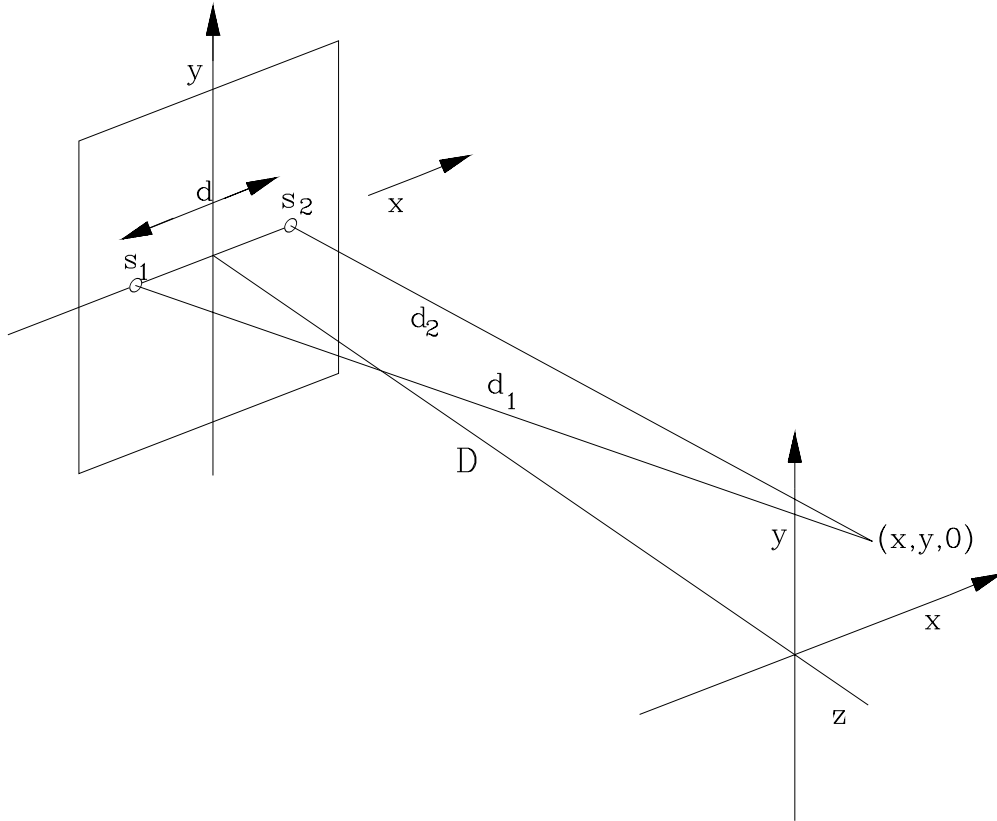


Figura 3.5: Interferència de dues ones esfèriques

$$d_1 - d_2 = \frac{d_1^2 - d_2^2}{d_1 + d_2} = \frac{2xd}{d_1 + d_2} \approx \frac{xd}{D}. \quad (3.8)$$

Per tant, l'equació de la intensitat s'escriurà

$$I \propto 4A \cos^2 \left( \frac{kxd}{2D} \right) = 4A \cos^2 \left( \frac{\pi xd}{\lambda D} \right), \quad (3.9)$$

on  $A$  és l'amplitud en el pla d'observació,  $A = a_1/d_1 = a_2/d_2$ .

### Anàlisi de la figura de franges de Young

- Un cop s'ha fixat la geometria ( $d$ ,  $D$ ) i la longitud d'ona, la intensitat que s'enregistra, és només una funció de la variable  $x$ ,  $I(x)$ : per tant, tots els punts que es trobin sobre una recta vertical tindran la mateixa configuració interferencial.
- El perfil de la intensitat segons l'eix  $x$  varia com un cosinus al quadrat. Es tracta d'una funció que es fa màxima quan  $xd/D = m\lambda$ , amb  $m$  enter, i es fa zero quan  $xd/D = \frac{2m+1}{2}\lambda$ . El màxim d'ordre  $m$  es trobarà a la posició

$$x_m = m\lambda \frac{D}{d}, \quad (3.10)$$

i la distància entre dos màxims serà

$$x_m - x_{m-1} = \lambda \frac{D}{d}. \quad (3.11)$$

### 3.2.2 Dispositius per obtenir franges de Young

Existeixen alguns dispositius experimentals que permeten reproduir l'experiment de Young. Es tracta d'aconseguir que els dos emissors puntuals siguin coherents entre si, és a dir, que la fase aleatòria sigui la mateixa de manera que la diferència de camí òptic  $\Delta$  sigui inferior a la longitud de coherència  $l_c$ . L'única possibilitat per aconseguir això és generar dues imatges geomètriques d'un únic focus puntual de llum.

- Per exemple, el biprisma de Fresnel consisteix en un dispositiu com el que es mostra a la figura 3.6. L'angle  $\alpha$  és molt petit. Si col·loquem una font de llum a distància  $a$  del prisma, es pot demostrar que un observador situat a l'altra banda del prisma (a la seva dreta segons la figura) veurà dues fonts de llum (coherents entre si) corresponents a les imatges geomètriques de la font de llum a través del biprisma.

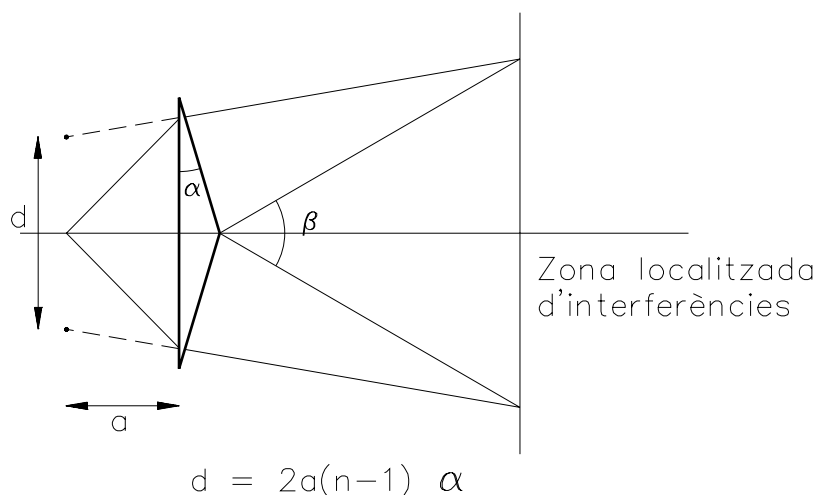


Figura 3.6: Biprisma de Fresnel

- Una altra possibilitat és el mirall de Lloyd. Es tracta de col·locar una font davant d'un mirall. La imatge virtual de la font a través del mirall actuarà com a segona font coherent amb la primera. Si es tracta d'un mirall dielèctric, el raig reflectit té un canvi de fase  $\pi$  addicional. Es pot comprovar que la figura d'interferències serà complementària a la que s'obté amb el biprisma de Fresnel: allà on hi havia màxims tindrem els mínims i a l'inrevés.

### 3.2.3 Coherència espacial

A l'apartat anterior hem considerat que la font de llum original és puntual. En canvi, les fonts de llum reals tenen unes determinades dimensions. Definim el *contrast de les franges* (també anomenat *factor de visibilitat*,  $V$ ) com el quocient

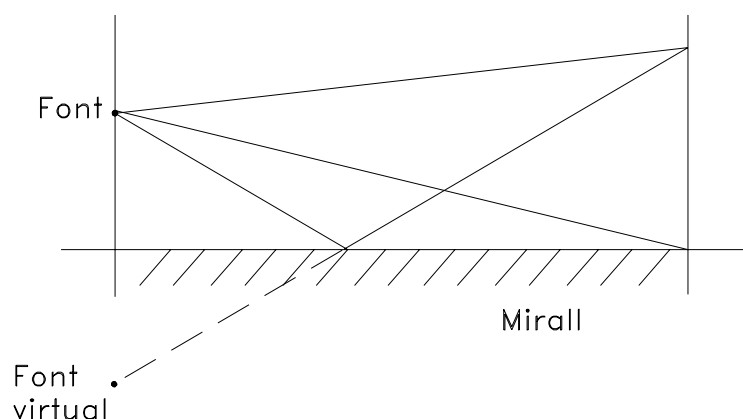


Figura 3.7: Mirall de Lloyd

$$V = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} \quad (3.12)$$

on  $I_M$  i  $I_m$  són les intensitats màxima i mínima en una distribució d'interferències. Per un experiment de Young ideal,  $I_m = 0$ , i per tant el contrast de les franges serà sempre òptim,  $V = 1$ . En canvi, si les amplituds de les dues ones que interfereixen són diferents,  $I_m \neq 0$  i per tant,  $V < 1$ . En el cas de no tenir interferències  $I_m = I_M$  i òbviament  $V = 0$ .

Si la font de llum que il·lumina el sistema no és puntual, el factor de visibilitat també pot ser inferior a 1, fins i tot verificant-se estrictament les quatre condicions per obtenir imatges d'interferències estables. El fenomen de la pèrdua de contrast en les franges a conseqüència de les dimensions de la font s'anomena *Coherència espacial*. L'estudi d'aquest fenomen es fa considerant que cada punt de la font és un emissor puntual que genera el seu sistema de franges d'interferència. Es veu que cadascun d'aquests emissors elementals genera unes franges amb un origen diferent (posició del màxim  $m = 0$ ). La superposició dels diferents termes  $\cos^2$  de l'equació 3.9, amb un petit desfasament entre ells, provoca la pèrdua de contrast.

### 3.3 Dispositius interferomètrics

#### 3.3.1 Interferències en làmines dielèctriques

Considerem el problema següent: sigui una làmina dielèctrica planoparal·lela de gruix  $d$ , índex de refracció  $n'$ , i que es troba en un medi d'índex  $n = 1$ . Sobre aquesta làmina fem incidir una ona electromagnètica plana polaritzada linealment i d'amplitud  $a$ , amb una direcció de propagació que forma un angle  $\epsilon$  amb la normal de les cares de la làmina. La llum, en arribar a la primera cara, es reflecteix i es refracta: l'amplitud transmesa i reflectida venen donades per  $at$  i  $ar$ , on  $t = t(n, n', \epsilon)$  i  $r = r(n, n', \epsilon)$  són els coeficients de transmissió calculats a partir de les fórmules de Fresnel. La llum que es transmet viatja a l'interior de medi dielèctric fins que es troba de nou amb la superfície de separació de medis. Part de la llum es reflecteix internament i part es transmet al medi exterior. La llum que es reflecteix internament genera per la seva part nous termes que es transmeten i es reflecteixen. La figura 3.8 mostra els diferents raigs que es generen i el valor de la seva amplitud. El coeficient de reflexió calculat, quan la reflexió es

produeix des d'un medi d'índex  $n$  sobre un material d'índex  $n'$  o a l'inrevés, té el mateix valor, en mòdul,  $|r| = |r'|$ . Això no és vàlid per a la transmissió, ja que  $t \neq t'$  (aquí es verifica  $tt' = 1 - r^2$ ).

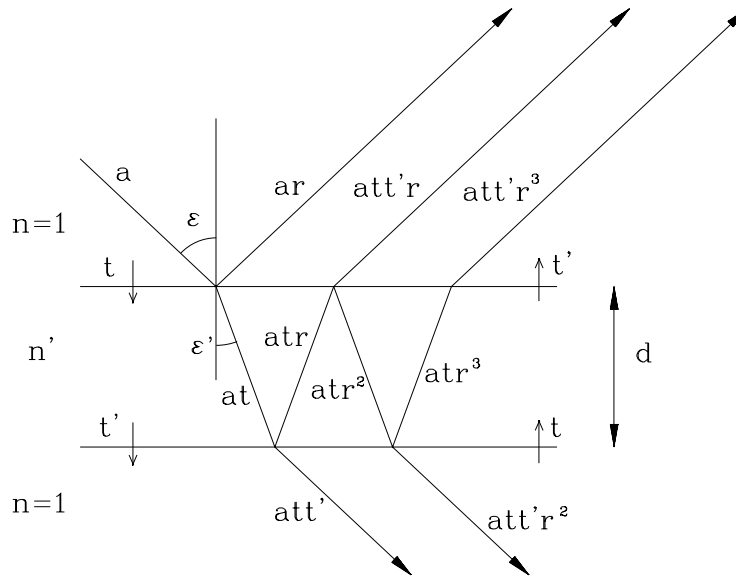


Figura 3.8: Feixos d'ones emergint d'una làmina dielèctrica

El pas següent en l'estudi d'aquest problema consisteix a sumar totes les contribucions de raigs que emergeixen, o bé de la primera cara (llum reflectida) o bé de la segona (llum transmesa). Tots els raigs surten paral·lels, i per tant mitjançant una lent convergent podem concentrar totes les contribucions en un punt del pla focal de la lent. Com que es tracta d'ones, per poder realitzar la suma de totes les contribucions cal conèixer el desfasament entre elles per tal de poder escriure formalment els termes de la sèrie. Recordem que el desfasament  $\delta$  és proporcional a la diferència de camí òptic  $\Delta$ ,  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$ . Ens podem fixar en la figura 3.9.

El camí òptic del raig que viatja a l'interior de la làmina passa pels punts  $I_1$ ,  $I_1'$  i  $I_2$ . Per tant, la diferència de camí òptic entre l'ona que passa per l'interior de la làmina i la que es reflecteix directament és:

$$\Delta = n'(I_1 I_1' + I_1' I_2) - I_1 E = 2n'd \cos(\epsilon'). \quad (3.13)$$

Cal notar que restem la quantitat  $I_1 E$ : com que treballem amb ones planes, a partir del pla definit pels punts  $I_2$  i  $E$ , el camí òptic serà idèntic. Finalment, el desfasament és

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} n'd \cos(\epsilon'). \quad (3.14)$$

Considerem ara totes les contribucions que s'han transmès a través de la làmina. Els camps s'escriuen de la manera següent:

1.  $E_1 = att' \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0))$
2.  $E_2 = att'r^2 \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + \delta))$

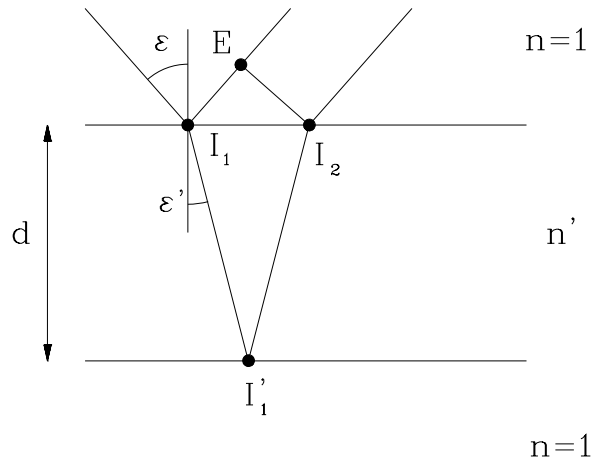


Figura 3.9: Càlcul del camí òptic

3.  $E_3 = att'r^4 \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + 2\delta))$
4.  $E_4 = att'r^6 \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + 3\delta))$
5. ...
6.  $E_{n+1} = att'r^{2n} \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + n\delta)) = E_1 r^{2n} e^{in\delta}$  ;

$\delta_0$  fa referència a una certa fase constant en relació a l'origen de coordenades. Les diferents contribucions es poden sumar amb facilitat ja que es tracta d'una sèrie geomètrica de raó  $r^2 e^{i\delta}$ ; per tant, el camp total transmès serà:

$$E_T = \sum_i E_i = E_1 \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}} = att' \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0)) \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}}. \quad (3.15)$$

La intensitat l'obtidrem fent

$$I_T = \frac{c}{4\pi} E_T E_T^* = \frac{c}{4\pi} \left| att' \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}} \right|^2. \quad (3.16)$$

Calculant, i recordant que  $tt' = 1 - r^2$ , s'obté que

$$I_T = \frac{c}{4\pi} \frac{a^2}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2(\delta/2)}. \quad (3.17)$$

Pel que fa a la llum que es reflecteix en la làmina, no cal repetir tot el càlcul. Només s'ha de tenir en compte que la intensitat total de la llum incident val  $(c/8\pi)a^2$ , i per tant

$$I_R = \frac{c}{8\pi} a^2 - I_T = \frac{c}{8\pi} \frac{a^2 \sin^2(\delta/2)}{\frac{(1-r^2)^2}{4r^2} + \sin^2(\delta/2)} \quad (3.18)$$

Les expressions de la intensitat transmesa i reflectida presenten màxims i mínims quan es verifiquen les condicions descrites en la taula següent:

Cas	Extrem	Desfasament	Valor de l'extrem
Llum transmesa	Màxim	$\delta = 2\pi m, m$ enter	$\frac{c}{8\pi} a^2$
Llum transmesa	Mínim	$\delta = (2m + 1)\pi, m$ enter	$\frac{c}{8\pi} \frac{a^2}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}}$
Llum reflectida	Màxim	$\delta = (2m + 1)\pi, m$ enter	$\frac{c}{8\pi} \frac{a^2}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}}$
Llum reflectida	Mínim	$\delta = 2\pi m, m$ enter	0

Abans de continuar cal fer alguns comentaris sobre com s'ha fet la deducció de l'equació de la intensitat en funció del desfasament:

- No s'han tingut en compte els efectes de la polarització, quan és conegut que els coeficients de reflexió i transmissió  $r$  i  $t$  són diferents si fan referència a la polarització perpendicular o paral·lela. Per a angles d'incidència petits,  $\epsilon \approx 0$ ,  $r_{\parallel} \approx r_{\perp}$ . Com veurem més endavant, els dispositius òptics basats en interferències d'ones en làmines dielèctriques treballen amb incidències quasi normals.
- A més, en alguns dispositius, com per exemple l'interferòmetre de Fabry-Perot, les cares del dielèctric estan semimirallades, o bé tenen un recobriment multicapa. Així s'aconsegueix un coeficient de reflexió proper a la unitat i pràcticament constant per a tots els angles d'incidència i longituds d'ona.
- El gruix de la làmina no pot ser arbitràriament gran. Perquè es produeixin interferències cal que la diferència de camins òptics dels raigs que interfereixin sigui inferior a la longitud de coherència. Com més gruixuda sigui la làmina amb més dificultat es verificarà aquesta condició.
- En els dispositius experimentals s'acostuma a treballar amb font extensa i per tant  $\epsilon$  pot prendre un rang continu de valors. En conseqüència, s'observaran anells d'intensitat constant per a cada valor d' $\epsilon$ , ja que hi ha simetria de revolució al voltant de la incidència normal.

A la figura 3.10, podem veure la dependència de la intensitat transmesa i reflectida en funció de  $\delta = 2n'd \cos(\epsilon')$  (noteu que en aquesta figura la intensitat està normalitzada a  $\frac{c}{8\pi}$ ).

La figura 3.11 mostra un espectre real de transmissió: es tracta d'un experiment en el qual la incidència és normal,  $\cos(\epsilon') = 1$ . En aquest cas, una làmina dielèctrica és il·luminada en el rang de longituds d'ona del visible i s'analitza la seva transmissió, és a dir, representem  $I(\lambda)$  (noteu que  $n' = n'(\lambda)$ ,  $d$  i  $r$  són constants).

$$I_T(\lambda) \propto \frac{1}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2\left(\frac{\pi n'(\lambda)d}{\lambda}\right)}. \quad (3.19)$$

En aquest exemple, tenim un dielèctric real (la conductivitat no és nul·la). És per això que no tots els màxims tenen la mateixa alçada.

### 3.3.2 Làmines antireflectores

Els recobriments antireflectors es fan servir per aconseguir que la major part de la llum incident es transmeti i no es perdi per reflexió. Per exemple, en cas d'incidència normal en una interfase aire-vidre, el 4% de l'energia es reflecteix. Així, en un sistema òptic format per moltes lents, les pèrdues que

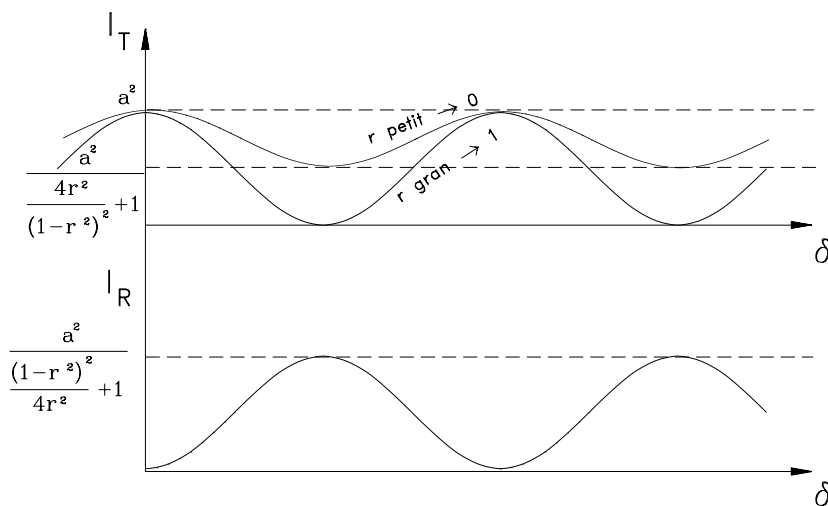


Figura 3.10: Intensitat en funció del desfasament

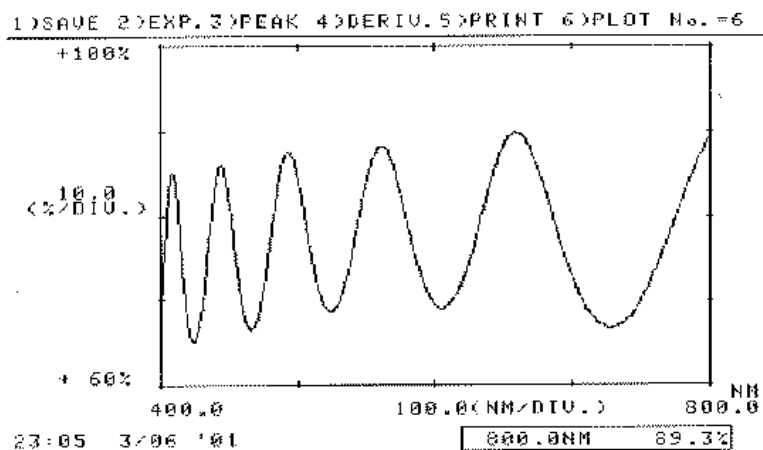


Figura 3.11: Espectre real de transmissió d'una làmina dielèctrica

s'acumulen fan que el sistema pugui esdevenir inviable. El vidre, recobert d'una làmina prima de material dielèctric i gruix apropiat, pot ser eficaç per disminuir la proporció de l'energia que torna al primer medi per reflexió.

Considerem un sistema com el que mostra la figura 3.12. Es tracta d'un material transparent (vidre), d'índex de refracció  $n_v$ , sobre el qual s'ha dipositat un dielèctric de gruix  $d$  i índex  $n$ . A més, s'imposa la condició  $1 < n < n_v$ . Considerem que la llum incideix sobre el sistema amb un angle molt proper a zero,  $\epsilon \approx 0$ . L'amplitud inicial de l'ona és  $a$ , i els coeficients de reflexió i transmissió a les interfases es troben indicats a la figura 3.12.

En les reflexions en què l'índex del primer medi és menor que el segon, s'ha de sumar  $+\pi$  a la fase de l'ona. Segons això, tots els raigs reflectits, incloent-hi el que es reflecteix directament des de l'aire sobre el medi d'índex  $n$ , incorporen un factor  $+\pi$  a la seva fase. La llum reflectida serà la suma de totes les contribucions que tornen al primer medi. A causa del plantejament del problema, aquesta suma ha de ser zero. Escrivim totes les contribucions del camp, igual que ho vam fer a l'equació 3.15



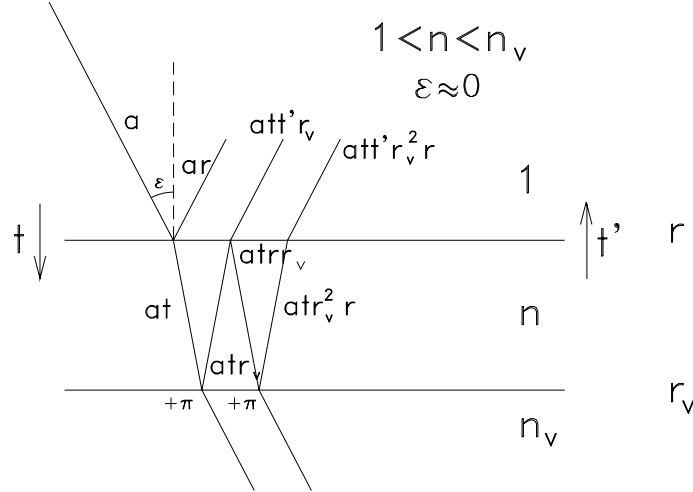


Figura 3.12: Sistema interferencial

1.  $E_1 = ar \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + \pi))$
2.  $E_2 = att'r_v \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + \delta + \pi))$
3.  $E_3 = att'r_v^2 r \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + 2(\delta + \pi)))$
4.  $E_4 = att'r_v^3 r^2 \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + 3(\delta + \pi)))$
5. ...
6.  $E_n = att'r_v^{n-1} r^{n-2} \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + (n-1)(\delta + \pi)))$

on  $\delta_0$  fa referència a una certa fase constant en relació a l'origen de coordenades i  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}nd$  és la diferència de fase, tal com s'ha vist a l'equació 3.14. Si impossem que totes els termes surtin en fase entre si a partir del segon raig, s'ha de verificar que

$$\frac{4\pi}{\lambda}nd + \pi = 2m\pi. \quad (3.20)$$

Això ens dóna una condició per al gruix de la làmina. Si  $m = 1$ , el gruix ha de ser  $d = \lambda/4n$ . Amb aquest gruix s'aconsegueix que totes les contribucions al camp reflectit a partir de la segona estiguin en fase i totes elles en oposició de fase amb la primera. Per sumar les diferents contribucions cal fixar-se que es tracta d'una serie geomètrica de raó  $rr_v$ ,

$$E_R = (-ar + att'r_v(1 + rr_v + r^2r_v^2 + \dots)) \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0)). \quad (3.21)$$

Aquesta suma es fa zero quan  $r = r_v$ . Si recordem que  $r = (1 - n)/(1 + n)$  i  $r_v = (n - n_v)/(n + n_v)$ , s'arriba a

$$n = \sqrt{n_v}. \quad (3.22)$$

Segons això, amb làmina de gruix  $\lambda/4n$  i un material adequat, és possible dissenyar una làmina antireflectora. No obstant això, aquest resultat ha estat deduït per incidència quasinormal i una única longitud d'ona.

Es pot fer una anàlisi equivalent i més general utilitzant sistemes multicapa de diferents gruixos i materials. Així es poden dissenyar recobriments antireflectors utilitzables en una banda de l'espectre més àmplia i per a diferents angles d'incidència.

### 3.3.3 L'interferòmetre de Fabry-Perot

L'interferòmetre de Fabry-Perot és un dispositiu de gran precisió utilitzat en espectroscòpia. El seu principal avantatge és el seu elevat poder resolutiu (capacitat de discriminar dues longituds d'ona molt properes). La física que descriu aquest aparell és molt similar a l'experiment de les interferències en làmines dielèctriques. L'esquema de l'interferòmetre és el de la figura 3.13.

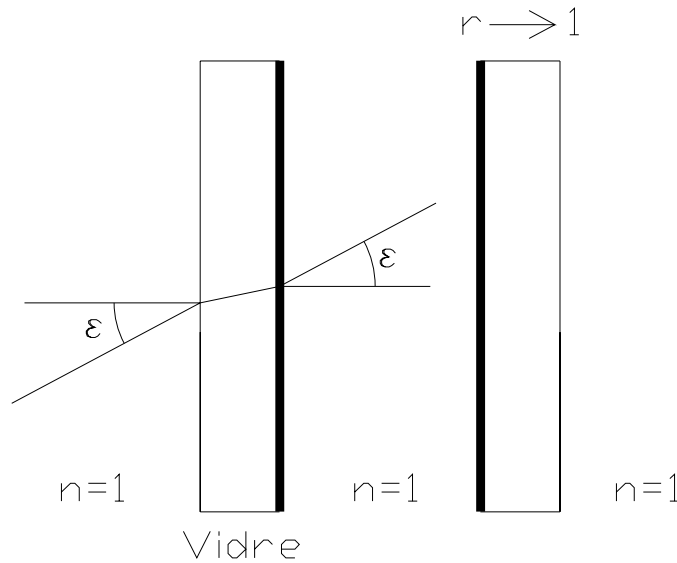


Figura 3.13: L'interferòmetre de Fabry-Perot

Es tracta de dos suports de vidre de cares planoparal·leles i enfrontats entre si a una distància  $d$  (en aire,  $n = 1$ ) que pot ser ajustable. Les cares internes estan tractades de manera que el factor de reflexió sigui proper a la unitat, per tal de tenir un bon contrast. Un raig de llum que arribi al sistema, amb un angle  $\epsilon$  respecte a la normal de la cara del suport de vidre, es refractarà en la cara anterior i posterior del vidre i incidirà també amb angle  $\epsilon$  sobre el segon suport de vidre. La llum que surti del sistema per la cara posterior ho farà de nou amb angle  $\epsilon$ .

L'interferòmetre funciona de la manera següent: utilitzem una font extensa de radi  $R_f$ . Aquesta llum emet en certes longituds d'ona que són les que volem conèixer. La font se situa en el pla focal d'una lent col·limadora de focal  $f'_c$  i, per tant, els raigs surten paral·lels en direccions angulars compreses entre  $[0, \epsilon_c]$  respecte a l'eix òptic, on  $\tan(\epsilon_c) = R_f/f'_c$ . Els raigs que incideixin amb un angle  $\epsilon$  es reflectiran múltiples vegades a l'interior del dispositiu i en sortiran les diferents contribucions. Tots aquests raigs transmesos surten amb un angle  $\epsilon$  respecte a l'eix de col·limació. Una segona lent de focal  $f'$  els focalitzarà en un punt del seu pla focal. Això vol dir que en aquest punt es farà la suma coherent de tots els raigs. La intensitat que tindrem en aquest punt, segons el que vam deduir a l'equació 3.17, serà

$$I_T(\lambda, \epsilon) \propto \frac{1}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2\left(\frac{2\pi d \cos(\epsilon)}{\lambda}\right)}. \quad (3.23)$$

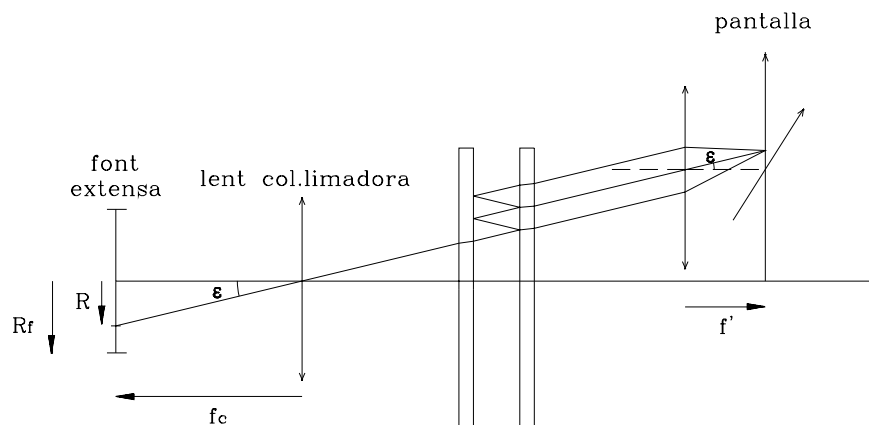


Figura 3.14: Sistema interferencial

Com que el problema presenta simetria de revolució respecte l'eix òptic de la segona lent, tots els punts del pla focal que es trobin a una distància  $R$  de l'eix de col·limació ( $\tan(\epsilon) = R/f'$ ) presentaran la mateixa configuració interferencial, i per tant la seva intensitat serà la mateixa. És a dir, al pla d'observació obtindrem anells.

Podem determinar quan es fa màxima l'equació anterior. Això passa quan  $\sin^2\left(\frac{2\pi d \cos(\epsilon)}{\lambda}\right) = 0$ , o el que és el mateix, quan es verifica

$$2d \cos(\epsilon) = m\lambda \quad m \text{ natural.} \quad (3.24)$$

Al centre, l'ordre interferencial  $m$  ( $m$  enter) amb el qual identifiquem un anell concret pren el seu valor màxim i val  $m = 2d/\lambda$ ;  $m$  és zero per  $\epsilon = \pi/2$ . Si la font de llum té radi  $R_f$ , existeix un angle màxim  $\epsilon_c$  amb què els raigs poden entrar en el sistema. Per tant, els valors que pot prendre  $m$  variaran entre un de màxim al centre i un de mínim a l'extrem del camp il·luminat.

### Poder resolutiu d'un interferòmetre Fabry-Perot

Una de les aplicacions més importants de l'interferòmetre de Fabry-Perot consisteix en la determinació de les longituds d'ona en les quals emet una font de llum. A més, gràcies a l'elevada precisió de l'interferòmetre és possible discriminar valors molt propers de longitud d'ona. Com que cada  $\lambda$  genera el seu propi sistema d'anells independent es visualitzaran parcialment superposats.

Considerem que dos anells es poden distingir (es resolten), si en el punt mitjà de la distància entre dos màxims, el valor de l'energia és inferior a la meitat de l'energia màxima. Prenem una llum barrejada de dues longituds d'ona,  $\lambda_1 = \lambda$  i  $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$ . Definim el poder resolutiu com el quocient  $|\lambda/\Delta\lambda|$ . Prenent el criteri de resolució anterior es pot demostrar que

$$\left| \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right| = \frac{\pi m r}{1 - r^2}. \quad (3.25)$$

La capacitat de resoldre longituds d'ona molt properes augmenta quan observem el centre de la imatge d'interferència ( $m$  gran) i quan el factor de reflexió  $r$  és alt (tendint a la unitat).

### 3.3.4 Filtres interferencials

El fenomen de les interferències en làmines primes pot ser utilitzat per a la construcció de dispositius de transmitància molt selectiva per a la longitud d'ona. Amb el seu ús és possible obtenir llums molt monocromàtiques. Considerem una làmina de gruix  $d$  d'un material d'índex  $n$ . Aquesta làmina es troba entre dos vidres planoparal·lels que fan de suport. Fem incidir llum blanca amb incidència normal,  $\epsilon = 0$ . En aquestes condicions, l'equació del desfasament 3.14 esdevé, per al cas dels màxims,

$$\frac{4\pi}{\lambda}nd = 2m\pi. \quad (3.26)$$

és a dir  $2nd = m\lambda$ . Si el factor de reflexió intern de les cares  $r$  és prou alt, els màxims d'interferència  $I_T(\lambda)$  (vegeu la figura 3.10, equació 3.19) es fan molt estrets, de manera que només passen les longituds d'ona que verifiquen la relació  $2nd = m\lambda$ . Per exemple, amb un gruix  $d = 150$  nm i un índex  $n = 1.7$ , passaran només les longituds  $\lambda = 510/m$  nm: 510, 255, 170, ... En la zona del visible es transmet amb intensitat màxima una única longitud d'ona ( $\lambda = 510$  nm).

### 3.3.5 Interferòmetres de Michelson i de Mach-Zehnder

#### L'interferòmetre de Michelson

Considerem un dispositiu òptic com el que es mostra a la figura 3.15, que utilitza una font de llum extensa. Per simplicitat, considerarem que aquesta es troba en pla focal objecte d'una lent col·limadora. Així aconseguim llum amb il·luminació paral·lela en totes les direccions permeses per les dimensions de la font. Davant del sistema d'il·luminació hi ha un sistema divisor del feix (làmina semitransparent): la meitat de l'energia travessa la làmina i l'altra meitat es reflecteix. Com que la làmina es troba disposada fent un angle de  $45^\circ$  respecte al pla que conté la lent col·limadora, els dos feixos resultants surten de la làmina semitransparent formant un angle de  $90^\circ$ . Aquests feixos de llum viatgen en les seves respectives direccions fins arribar als miralls, canvien de sentit i es retroben a la làmina semitransparent de nou. Part de la llum torna en direcció a la font i part es dirigeix vers un pla d'observació on s'analitza la llum. Els miralls no tenen per què trobar-se a la mateixa distància de la làmina semiemmirallada. Sigui  $l_a$  la distància de la làmina fins al mirall situat normalment al braç horitzontal i  $l_b$ , la distància de la làmina fins al mirall disposat normalment al braç vertical. La diferència de camí òptic és  $\Delta = 2(l_a - l_b) = 2d$  ( $n = 1$ , ja que el dispositiu es troba en l'aire). Si el feix de llum pren una direcció que forma un angle  $\theta$  amb l'eix de la lent col·limadora, es pot comprovar que, en aquest cas, la diferència de camí òptic és  $\Delta = 2d \cos(\theta)$ . El sistema presenta simetria de revolució respecte a un eix normal al pla d'observació, i per tant en el pla d'observació s'obtidran anells; a més, com que es tracta de la interferència de dues ones que fan camins òptics diferents, la intensitat serà proporcional a

$$I \propto \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right), \quad (3.27)$$

i per tant, els màxims d'interferència es disposaran seguint la llei següent:

$$2d \cos(\theta) = m\lambda, \quad (3.28)$$

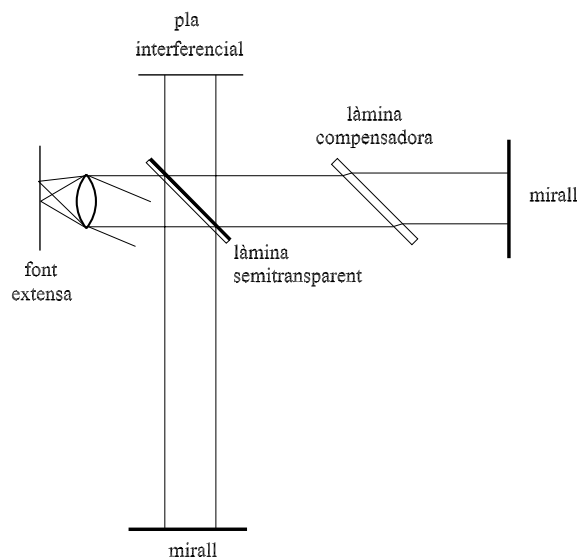


Figura 3.15: L'interferòmetre de Michelson

amb  $m$  natural. Si considerem just el centre de la figura d'interferència,  $\cos(\theta) = 1$ , i per tant en el centre es verificarà  $2d = m\lambda$ . Això vol dir que, si la diferència de camins òptics  $2d$  no és múltiple exacte de  $\lambda$ , en el centre no tindrem un màxim d'intensitat. A més, si  $l_a - l_b = 0$  (diferència de camins òptics zero) aleshores ens trobem a  $m = 0$ .

### Alguns comentaris més

- Des del punt de vista històric cal fer notar que aquest instrument va ser utilitzat el 1887 per Michelson i Morley en el seu intent de mesurar la velocitat de la llum en relació amb la Terra.
- A l'interferòmetre de la figura 3.15 es pot observar un element denominat *làmina compensadora*. Es tracta d'una làmina de material transparent que té exactament el mateix gruix que la làmina semitransparent (gruix  $d_{st}$ ). La llum que fa el camí vertical (segons la figura 3.15) travessa tres vegades la làmina semitransparent afegint el factor  $3n_{st}d_{st}$  al camí òptic (la làmina està emmirallada en el costat dret segons el dibuix), mentre que la llum que pren l'altra direcció només travessa la làmina una vegada. Per compensar aquest efecte i fer que les diferències de camí siguin atribuïbles exclusivament a la diferència geomètrica  $2(l_a - l_b) = 2d$ , s'inclou la làmina compensadora. Així, la llum que segueix el camí horitzontal compensa l'excés de camí òptic que es realitza seguint el camí vertical.
- Longitud de coherència. Perquè el fenomen interferencial sigui visible, s'ha de verificar que la diferència de camins òptics  $2d$  sigui inferior a la longitud de coherència de la llum analitzada ( $l_c$ ). Això indica un mètode per determinar experimentalment  $l_c$ : en augmentar la diferència  $2d$ , el contrast dels anells anirà minvant fins que aquests desapareguin. És en aquest moment que determinem  $l_c$ .
- Si en comptes de treballar amb una font extensa ho fem amb una de puntual, la intensitat de la figura d'interferència serà constant. En modificar la diferència de longitud dels dos braços  $2d$ , aquesta intensitat anirà variant, passant per màxims quan es verifiqui la relació  $2d = m\lambda$ . Aquesta configuració de l'interferòmetre de Michelson s'anomena *interferòmetre de Twyman-Green*.

### L'interferòmetre de Mach-Zehnder

Existeixen altres interferòmetres de doble feix. Per la seva àmplia utilització en metrologia òptica destaquem *l'interferòmetre de Mach-Zehnder*, que es mostra a la figura 3.16.

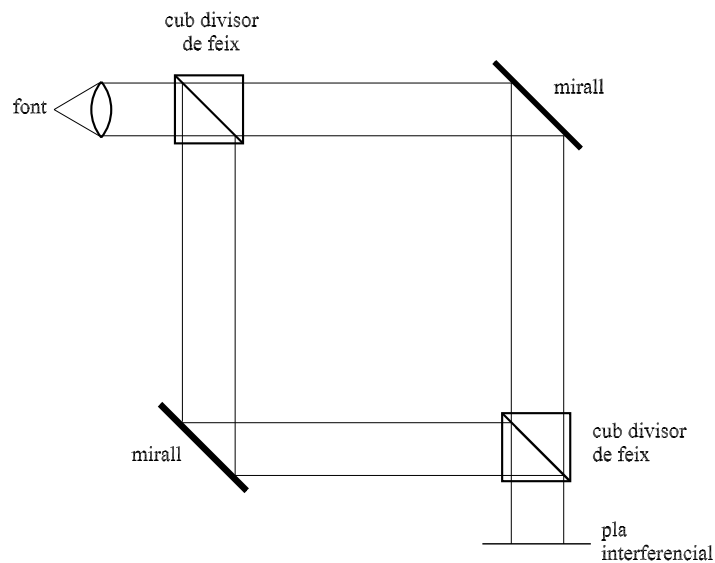


Figura 3.16: L'interferòmetre de Mach-Zehnder

Consisteix en un sistema d'il·luminació que genera un feix d'ones planes. Un sistema divisor del feix fa que la llum segueixi dos camins diferents. Mitjançant miralls es fa que la llum segueixi una trajectòria com la que es mostra a la figura, i mitjançant un segon cub divisor de feix se sumen les dues contribucions, que, òbviament, han seguit camins òptics diferents. Al pla d'observació s'analitzen el resultat.



## Capítol 4

# Difracció

### 4.1 Teoria escalar

#### 4.1.1 Introducció a la teoria escalar de la difracció

Sommerfeld va definir la *difracció* com la propagació no rectilínia de la llum que no es pot interpretar a partir de les lleis de la reflexió i la refracció. Grimaldi, al segle XVII, va ser el primer que va observar fenòmens difractius: en passar un feix de llum a través d'una obertura practicada sobre una pantalla, va observar que el pas de claror a fosc no era abrupte (com indica la propagació rectilínia). Anys després, Fresnel va realitzar el primer intent seriós d'explicar els fenòmens de difracció (1818), basant-se en unes modificacions arbitràries del principi de Huygens. El 1882, Kirchhoff va donar l'explicació dels fenòmens de difracció en termes de la teoria escalar. La seva teoria té inconvenients formals d'ordre matemàtic que van ser solucionats per Sommerfeld el 1894, introduint petites modificacions en la teoria anterior.

La teoria escalar és suficientment rigorosa per explicar la majoria dels resultats experimentals macroscòpics. Tot i que es tracta d'una simplificació que no té en compte el caràcter vectorial dels camps electromagnètics, la teoria escalar funciona amb èxit quan les obertures són més grans que la longitud d'ona de la llum i quan les distàncies d'observació del camp que travessa l'obertura són prou grans. En aquestes condicions, la polarització del camp electromagnètic no varia en difractar-se, i per tant es pot prescindir del formalisme vectorial.

#### 4.1.2 Ones escalars. El teorema de Green

Una ona escalar qualsevol perfectament monocromàtica,  $U(\vec{r}, t) = U(\vec{r})e^{-i\omega t}$ , verifica en el buit l'equació d'ones:

$$\Delta U(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (4.1)$$

En conseqüència, l'amplitud complexa (part espacial)  $U(\vec{r})$  verifica l'equació de Helmholtz:

$$\Delta U(\vec{r}) = -k^2 U(\vec{r}), \quad (4.2)$$

on  $\vec{r}$  és el vector de posició,  $k$  és el número d'ona,  $\omega = 2\pi\nu$ , i  $k = 2\pi/\lambda$ .



La formulació de la teoria escalar de la difracció es basa en l'ús del *teorema de Green*: Siguin  $U(P)$  i  $G(P)$  dues funcions qualsevol de valors complexos, contínues i amb primera i segona derivades contínues a l'interior d'un recinte  $V$  tancat per una superfície  $S$ . En aquestes condicions es verifica:

$$\int_V [G\Delta U - U\Delta G] dv = \int_S \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds. \quad (4.3)$$

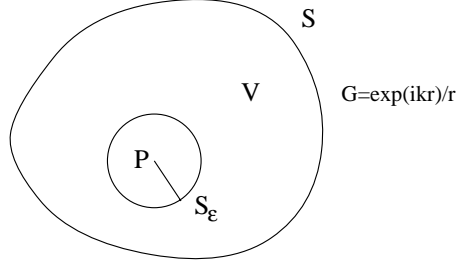


Figura 4.1: Geometria

En el problema que abordarem,  $U$  serà la part espacial de l'equació d'ones, i  $G$ , una funció de suport denominada *funció de Green*. L'elecció d'aquesta només està condicionada per les condicions del teorema de Green, tot i que cal escollir-la de manera apropiada per tal d'abordar el problema amb el mínim de complicacions matemàtiques possible. Cal notar que  $\frac{\partial}{\partial n}$  és la derivada de  $G$  o  $U$  segons la direcció normal a la superfície  $S$ .

A partir d'ara, no tindrem en compte la part temporal de l'ona, ja que aquesta no aporta informació rellevant. Sigui  $P \in V$ , el punt on farem l'observació del camp. Definim una possible funció de Green com

$$G = \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (4.4)$$

Cal notar que en el punt  $P$  ( $r = 0$ ) aquesta funció no està definida. Per evitar la discontinuïtat, s'exclou el punt del recinte  $V$  definint una superfície esfèrica  $S_\epsilon$  al voltant del punt amb un radi  $\epsilon$  infinitesimal. Així, la nova superfície d'integració  $S'$  serà  $S' = S + S_\epsilon$  i el nou volum  $V'$ ,  $V' = V - V_\epsilon$ , on  $V_\epsilon$  és el volum definit per  $S_\epsilon$ . La funció  $G$  és una ona esfèrica d'amplitud unitat, i per tant verifica també l'equació de Helmholtz:  $\Delta G = -k^2 G$ .

Aplicant el teorema de Green al nou recinte d'integració  $V'$  obtenim

$$\int_{V'} [G\Delta U - U\Delta G] dv = - \int_{V'} [k^2 G U - k^2 U G] dv = 0; \quad (4.5)$$

per tant,

$$\int_{S'} \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = 0 \quad (4.6)$$

i com que  $S' = S + S_\epsilon$ ,

$$- \int_{S_\epsilon} \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = \int_S \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds. \quad (4.7)$$

### 4.1.3 Teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff

L'avaluació de la integral definida sobre  $S_\epsilon$  és senzilla. Es tracta de calcular el límit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds. \quad (4.8)$$

Com que  $S_\epsilon$  és una superfície esfèrica, les derivades normals de l'equació anterior esdevenen derivades en la direcció radial  $\epsilon$ . La derivada normal a la superfície  $S_\epsilon$  apunta vers  $P$ ; per tant,  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \epsilon}$ . Si  $G$  sobre de  $S_\epsilon$  es pot escriure com  $\exp(ik\epsilon)/\epsilon$ , la derivada s'escriurà com

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \left[ \frac{1}{\epsilon} - ik \right] \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon}. \quad (4.9)$$

El diferencial de superfície és  $ds = \epsilon^2 d\Omega$ , on  $d\Omega$  és el diferencial d'angle sòlid. Substituint la derivada anterior a la integral,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[ \frac{\partial U}{\partial n} \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} - U \left[ \frac{1}{\epsilon} - ik \right] \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \right] \epsilon^2 d\Omega. \quad (4.10)$$

Com que les funcions i les derivades presents a la integral estan acotades, dels tres termes continguts a la integral només el segon serà diferent de zero. Considerant, a més a més, la continuïtat de  $U$ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \int_{S_\epsilon} U \frac{1}{\epsilon} \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \epsilon^2 d\Omega = -U(P) \int_{S_\epsilon} d\Omega = -4\pi U(P); \quad (4.11)$$

i per tant l'equació 4.7 s'escriurà

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{\partial U}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - U \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{e^{ikr}}{r} \right] \right] ds, \quad (4.12)$$

resultat que es coneix com el *teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff*.

### 4.1.4 Aplicació del teorema de Helmholtz-Kirchhoff a la difracció

En aquesta secció, s'aplica el teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff al problema de la difracció d'una ona escalar a través d'una obertura continguda en una superfície plana. Considerem la superfície  $S$  que envolta el punt d'observació  $P$ . La prendrem subdividida en dues seccions  $S = S_1 + S_2$ .  $S_1$  correspon al pla que conté l'obertura  $\Sigma$  i  $S_2$ , correspon a la superfície esfèrica centrada en  $P$  i de radi suficientment gran.

El primer que cal fer és avaluar la integral 4.12 a la superfície  $S_2$ . Com que estem treballant amb il·luminació monocromàtica, i per tant, de longitud de coherència infinita, un cop l'ona s'hagi propagat a velocitat  $c$ , la contribució de  $S_2$  a la integral pot no ser menyspreable. Per aclarir aquest aspecte, calculem el límit de

$$U(P) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds. \tag{4.13}$$

La derivada en la direcció normal (radial) a  $S_2$  de  $G$  val

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \left[ \frac{1}{R} - ik \right] \frac{e^{ikr}}{r} \approx ikG, \tag{4.14}$$

si  $r \gg \lambda$ . Per tant, la integral anterior val

$$U(P) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} G \left[ \frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right] ds = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} e^{ikr} \left[ \frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right] r^2 d\Omega, \tag{4.15}$$

on  $ds = r^2 d\Omega$ . Aquesta integral cau a zero si es verifica

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ \frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right] = 0. \tag{4.16}$$

Aquesta condició és certa si  $U$  és una ona esfèrica, es a dir  $U = Ae^{ikr}/r$ . Atès que una ona qualsevol pot ser expressada en termes d'una combinació lineal d'ones esfèriques, a la pràctica aquest resultat es verifica sempre.

**Condicions de contorn de Kirchhoff**

Avaluem ara la integral sobre  $S_1$ . Kirchhoff, fent servir un criteri que semblava intuïtiu, va imposar les restriccions següents:

1. El camp  $U$  i la seva derivada normal prenen els mateixos valors a l'obertura  $\Sigma$ , en presència o no de la superfície  $S_1$ .
2. Sobre la superfície  $S_1$  i fora de  $\Sigma$ ,  $U$  i la seva derivada normal valen zero. Aquesta condició permet realitzar la integral estesa només a la geometria de  $\Sigma$ .

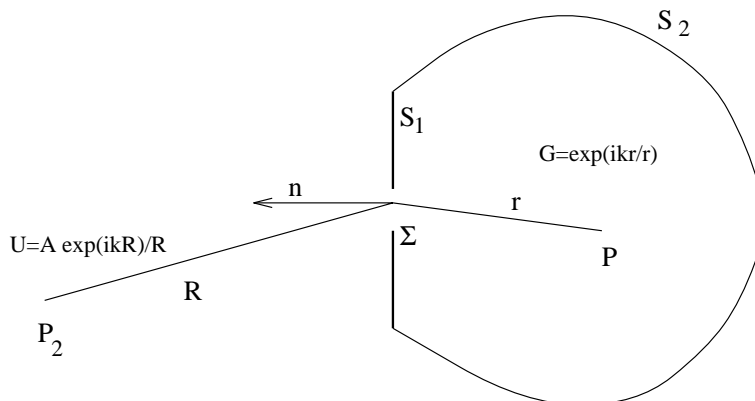


Figura 4.2: Geometria. Fórmula de Fresnel-Kirchhoff

### Fórmula de Fresnel-Kirchhoff

Considerem la forma en què s'il·lumina l'obertura. Concentrem-nos en el cas en què l'obertura està il·luminada per una ona esfèrica que prové d'un punt  $P_2$ :  $A \frac{e^{ikR}}{R}$ . Les derivades normals a  $\Sigma$  de  $G$  i  $U$  valen

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \cos(\vec{n}, \vec{r}) \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{\exp(ikr)}{r} \approx ikG \cos(\vec{n}, \vec{r}) \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} \approx ikU \cos(\vec{n}, \vec{R}), \quad (4.18)$$

on  $\cos(\vec{n}, \vec{r})$  i  $\cos(\vec{n}, \vec{R})$  són els cosinus dels angles formats pel vector normal a  $\Sigma$  i els vectors posició  $\vec{r}$  i  $\vec{R}$  respectivament. Per tant la integral de difracció en aquest cas esdevé

$$U(P) = \frac{A}{2i\lambda} \int_{\Sigma} \frac{\exp(ik(r+R))}{r+R} \left[ \cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{R}) \right] ds, \quad (4.19)$$

coneguda com la *fórmula de Fresnel-Kirchhoff*. Aquesta fórmula ens dóna l'expressió del camp escalar difractat a través d'una obertura qualsevol il·luminada per una ona esfèrica. Noteu que aquesta fórmula és simètrica respecte a la font o el punt d'observació (*teorema de reciprocitat*).

### Consideracions finals a la fórmula de Fresnel-Kirchhoff

1. Si l'obertura és petita enfront de les distàncies  $R$  i  $r$ , els factors  $\cos(\vec{n}, \vec{r})$  i  $\cos(\vec{n}, \vec{R})$  són pràcticament constants. S'anomena *factor d'obliquïtat* la semidiferència  $(\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{R}))/2$ .
2. Si l'ona que il·lumina l'obertura no és esfèrica, és possible descriure qualsevol camp en termes d'ones esfèriques i aplicar la fórmula deduïda.
3. Per a angles petits (és a dir, distàncies axials molt més grans que les dimensions de l'obertura) el factor d'obliquïtat és proper a la unitat, ja que  $\cos(\vec{n}, \vec{r}) \approx 1$  i  $\cos(\vec{n}, \vec{R}) \approx -1$ .
4. L'expressió 4.19 s'ha deduït utilitzant una ona esfèrica  $\frac{A \exp(ikR)}{R}$  per il·luminar l'obertura. Si la font de llum és a l'infinit, l'obertura s'il·lumina amb una ona plana d'amplitud  $A'$ ;

$$U(P) = \frac{A'}{i\lambda} \int_{\Sigma} \frac{\exp(ikr)}{r} ds \quad (4.20)$$

5. Si el sistema s'il·lumina amb una ona qualsevol, d'amplitud complexa en el pla de l'obertura  $U(\Sigma)$ , l'expressió es pot generalitzar a

$$U(P) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} U(\Sigma) \frac{\exp(ikr)}{r} ds. \quad (4.21)$$

## 4.2 Aproximació de Fresnel

### 4.2.1 Introducció a l'aproximació de Fresnel

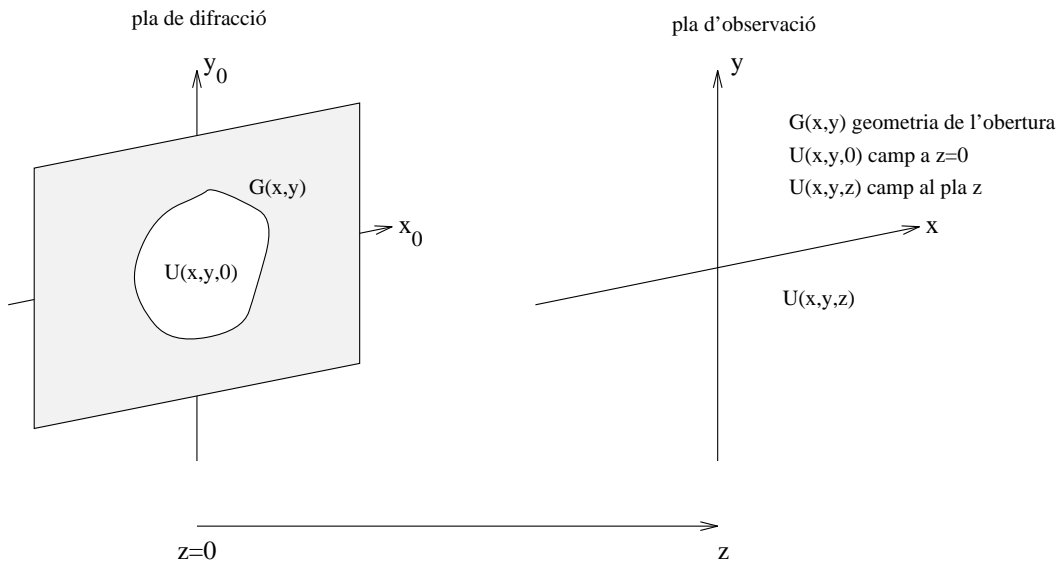


Figura 4.3: Difracció de Fresnel

A partir d'ara fixarem uns eixos coordinats  $(x_0, y_0)$  a la pantalla que conté l'obertura. L'eix  $z$  és l'eix normal al pla de l'obertura, que considerarem a  $z = 0$ . Els punts del pla normal a l'eix  $z$  que conté el punt d'observació  $P$  tindran coordenades  $(x, y, z)$ . La distància d'observació  $z$  serà molt més gran que les distàncies transversals involucrades, i per tant podem considerar que el factor d'obliquïtat és aproximadament 1. Escrivint ara la fórmula de Fresnel-Kirchhoff en coordenades cartesianes tenim

$$\begin{aligned}
 U(P) &= \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} U(P_{\Sigma}) \frac{\exp(ikr)}{r} ds = \\
 &= \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} U(x_0, y_0, 0) \frac{\exp(ik\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2)})}{\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2)}} dx_0 dy_0
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

### 4.2.2 Aproximació de Fresnel

La distància entre un punt de l'obertura a  $(x_0, y_0, 0)$  i el punt d'observació  $P(x, y, z)$  és

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x-x_0)^2}{z^2} + \frac{(y-y_0)^2}{z^2}}. \tag{4.23}$$

Si es verifica que  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \ll z^2$ , es pot aproximar  $r$  per  $z$  en el denominador. No obstant això, el terme de l'exponencial complexa a la integral varia molt ràpidament (factor  $2\pi/\lambda$ ), i per tant un petit error en l'avaluació de  $r$  pot suposar un error molt gran en l'estimació de l'angle. Amb vista a simplificar l'expressió de Fresnel-Kirchhoff, desenvolupem  $r$  en sèrie de Taylor fins a primer grau,

$$r = z \sqrt{1 + \frac{(x-x_0)^2}{z^2} + \frac{(y-y_0)^2}{z^2}} \approx z \left[ 1 + \frac{(x-x_0)^2}{2z^2} + \frac{(y-y_0)^2}{2z^2} \right]. \tag{4.24}$$

Això equival a aproximar una superfície esfèrica per mitjà d'una superfície parabòlica. La fórmula de difracció pren ara la forma següent (fórmula de difracció de Fresnel):

$$U(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{\Sigma} U(x_0, y_0, 0) \exp\left(\frac{ik}{2z}((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)\right) dx_0 dy_0. \quad (4.25)$$

Els límits d'integració s'estenen a l'obertura  $\Sigma$ . Com que el camp elèctric és zero a fora de l'obertura, podem estendre els límits d'integració de  $-\infty$  a  $+\infty$ , fent que

$$\psi(x, y) = U(x, y, 0)G(x, y), \quad (4.26)$$

on  $G(x, y)$  és la funció que descriu la geometria de l'obertura  $\Sigma$ .

### 4.2.3 Difracció a distància llunyana

Prenguem de nou la fórmula de Fresnel:

$$U(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) \exp\left(\frac{ik}{2z}((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)\right) dx_0 dy_0. \quad (4.27)$$

Desenvolupant els binomis  $((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)$ ,

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-\frac{ik}{z}(xx_0 + yy_0)} dx_0 dy_0 = \\ &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-2\pi i\left(\frac{x}{\lambda z}x_0 + \frac{y}{\lambda z}y_0\right)} dx_0 dy_0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Quan la distància d'observació  $z$  és molt gran, l'exponencial quadràtica a l'interior de la integral  $\exp\left(\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right)$  esdevé la unitat. Cal tenir en compte que la dimensió màxima dels punts de l'obertura  $\Sigma$  serà petita en comparació a  $z$ , però això no té per què passar en el pla d'observació. És per això que el terme exponencial quadràtic de fora de la integral no desapareix. La fórmula de difracció de Fraunhofer s'escriu

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) \exp\left(-2\pi i\left(\frac{x}{\lambda z}x_0 + \frac{y}{\lambda z}y_0\right)\right) dx_0 dy_0 = \\ &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \mathcal{TF}_{\lambda z}[\psi(x_0, y_0)], \end{aligned} \quad (4.29)$$

on  $\mathcal{TF}$  representa la transformada de Fourier.

La intensitat que captaria un detector en aquestes condicions és

$$I(x, y, z) \propto |\mathcal{TF}_{\lambda z}[\psi(x_0, y_0)]|^2. \quad (4.30)$$

És a dir, en condicions de difracció de Fraunhofer, la distribució d'intensitat és proporcional a la transformada de Fourier (TF) a escala  $\lambda z$  del camp elèctric a l'obertura difractant.

## 4.3 Aproximació de Fraunhofer

### 4.3.1 Ona plana a través d'un objecte rectangular

Per calcular la difracció de Fraunhofer d'un objecte, farem servir l'equació següent:

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{TF}_{\lambda z}[\psi(x_0, y_0)]. \quad (4.31)$$

Suposem que l'objecte és il·luminat per una ona plana  $Ae^{ikz}$ . A  $z = 0$ , l'ona plana esdevé  $A$ . Escriurem la transformada de Fourier (TF) d'una funció  $f(x, y)$  com  $F(u, v)$ , on  $(u, v)$  són les freqüències espacials. Cal recordar que la TF d'una obertura rectangular de dimensions  $l_x \times l_y$  val

$$\mathcal{TF} \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{l_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{l_y}\right) \right] = l_x l_y \text{sinc}(l_x u) \text{sinc}(l_y v); \quad (4.32)$$

i per tant, el camp elèctric escalar a distància  $z$  s'escriu

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{TF}_{\lambda z} \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{l_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{l_y}\right) \right] = \\ &= A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} l_x l_y e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \text{sinc}\left(\frac{l_x x}{\lambda z}\right) \text{sinc}\left(\frac{l_y y}{\lambda z}\right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

on s'han substituït les variables  $(u, v)$  per  $\frac{x}{\lambda z}$  i  $\frac{y}{\lambda z}$ . La intensitat enregistrada per un detector serà el mòdul al quadrat de l'expressió anterior,

$$I(x, y, z) = A^2 \frac{l_x^2 l_y^2}{\lambda^2 z^2} \text{sinc}^2\left(\frac{l_x x}{\lambda z}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{l_y y}{\lambda z}\right). \quad (4.34)$$

### 4.3.2 Ona plana a través d'una obertura circular

La fórmula per calcular la difracció de Fraunhofer es reescriu en coordenades polars quan l'objecte té simetria circular,  $\psi(r, \theta) = \psi(r)$ :

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}r^2} \mathcal{TF}_{\lambda z}[\psi(r_0)]. \quad (4.35)$$

La TF d'un funció amb simetria circular és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(xu+yv)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} f(r_0) e^{-i2\pi r r_0 \cos(\theta_0 - \theta)} r_0 dr_0 = F(r, \theta), \quad (4.36)$$

on s'ha aplicat el canvi  $x = r_0 \cos \theta_0$ ,  $y = r_0 \sin \theta_0$  i  $u = r \cos \theta$ ,  $v = r \sin \theta$ . Fent servir la igualtat,

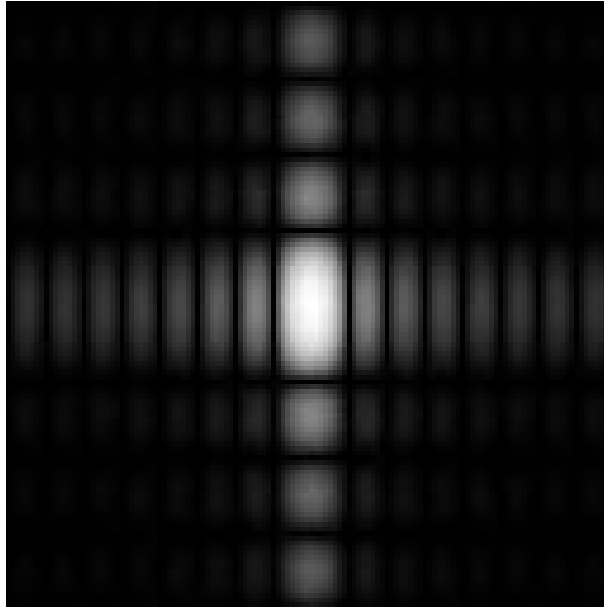


Figura 4.4: Difracció de Fraunhofer d'un objecte rectangular el costat vertical del qual és menor que l'horitzontal

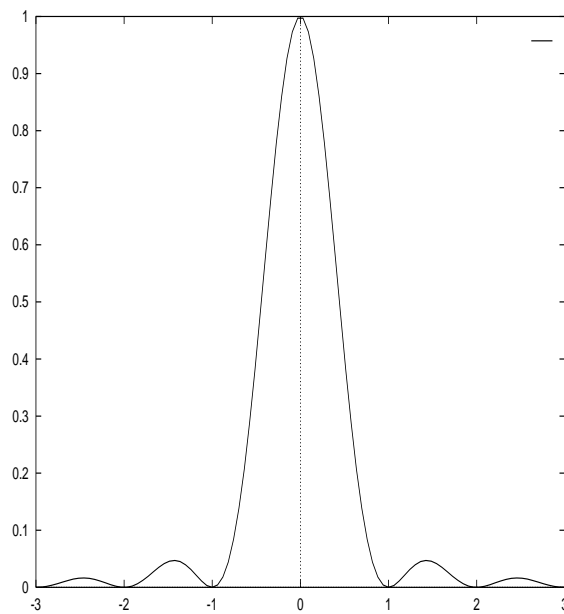


Figura 4.5: Perfil de la funció que descriu la intensitat de la difracció de Fraunhofer d'un rectangle

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ia \cos(\theta-\phi)} d\theta \quad (4.37)$$

s'obté que

$$F(r) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r_0) J_0(2\pi r r_0) r_0 dr_0. \quad (4.38)$$

Per calcular la difracció de Fraunhofer quan una ona plana  $Ae^{ikz}$  travessa una obertura circular de radi  $R$ ,  $\text{circ}(\frac{r}{R})$  a  $z = 0$ , hem de calcular la integral anterior (feu  $f(r_0) = 1$  entre 0 i  $R$ ). Aplicant ara la relació



$$\frac{R}{a} J_1(aR) = \int_0^R J_0(ar) r dr, \quad (4.39)$$

es pot demostrar que

$$\mathcal{TF} \left[ \text{circ}\left(\frac{r_0}{R}\right) \right] = R \frac{J_1(2\pi Rr)}{r}, \quad (4.40)$$

i per tant, el camp elèctric escalar val

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{TF}_{\lambda z} \left[ \text{circ}\left(\frac{r_0}{R}\right) \right] = \\ &= A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} R e^{\frac{ik}{2z}(r^2)} \frac{J_1\left(\frac{2\pi Rr}{\lambda z}\right)}{\frac{r}{\lambda z}} = -iAR e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(r^2)} \frac{J_1\left(\frac{2\pi Rr}{\lambda z}\right)}{r}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

mentre que la intensitat,

$$I(r) = A^2 \frac{R^2}{r^2} J_1^2\left(\frac{2\pi Rr}{\lambda z}\right). \quad (4.42)$$

Es coneix com *radi del disc d'Airy* el radi del primer mínim de la funció anterior. La funció  $\frac{J_1(\pi x)}{\pi x}$  s'anul·la a  $x = 1.22$ ; i per tant,

$$r_A = 1.22 \frac{\lambda z}{2R}. \quad (4.43)$$

### 4.3.3 Ona plana a través d'una estructura periòdica unidimensional

Sigui un objecte de transmitància  $f(x, y)$  repetit periòdicament, amb període  $P$ . La funció matemàtica que modelitza aquest objecte s'escriu

$$\psi(x, y) = \sum_{m=0}^{N-1} f(x - mP). \quad (4.44)$$

La transformada de Fourier a escala  $\lambda z$  de l'expressió anterior és

$$\mathcal{TF}_{\lambda z}[\psi(x_0, y_0)] = F\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right) \sum_{m=0}^{N-1} \left(1 + \exp\left(-\frac{2\pi i x P}{\lambda z}\right) + \exp\left(-\frac{2\pi i x (2P)}{\lambda z}\right) + \dots + \exp\left(-\frac{2\pi i x (n-1)P}{\lambda z}\right)\right); \quad (4.45)$$

i per tant, quan una ona plana travessa aquest objecte, el camp elèctric escalar es

$$U(x, y, z) = A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} F\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right) \sum_{m=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{2\pi i x m P}{\lambda z}\right). \quad (4.46)$$

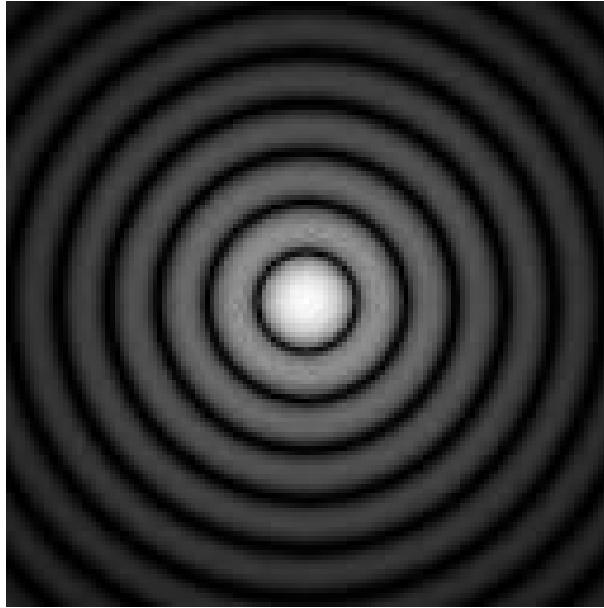
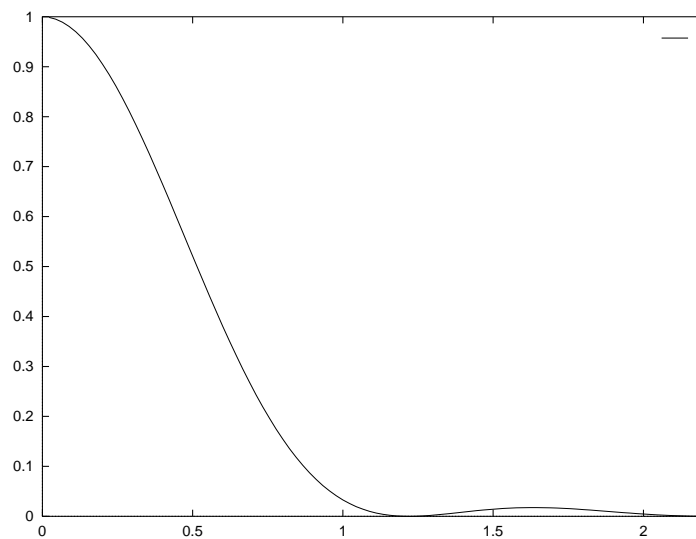


Figura 4.6: Difracció de Fraunhofer d'un cercle

Figura 4.7: Perfil de la funció que descriu la intensitat de la difracció de Fraunhofer d'un cercle. El primer zero de la funció es troba a  $r=1.22$ 

Els termes de la suma de l'equació anterior segueixen una progressió geomètrica, la raó de la qual és  $r = \exp(-\frac{2\pi i x m P}{\lambda z})$ . Com que es verifica que

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{N-1} = \frac{1 - r^N}{1 - r}, \quad (4.47)$$

aleshores

$$U(x, y, z) = A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} F\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right) \frac{1 - \exp(-\frac{2\pi i x(N-1)P}{\lambda z})}{1 - \exp(-\frac{2\pi i x P}{\lambda z})}. \quad (4.48)$$

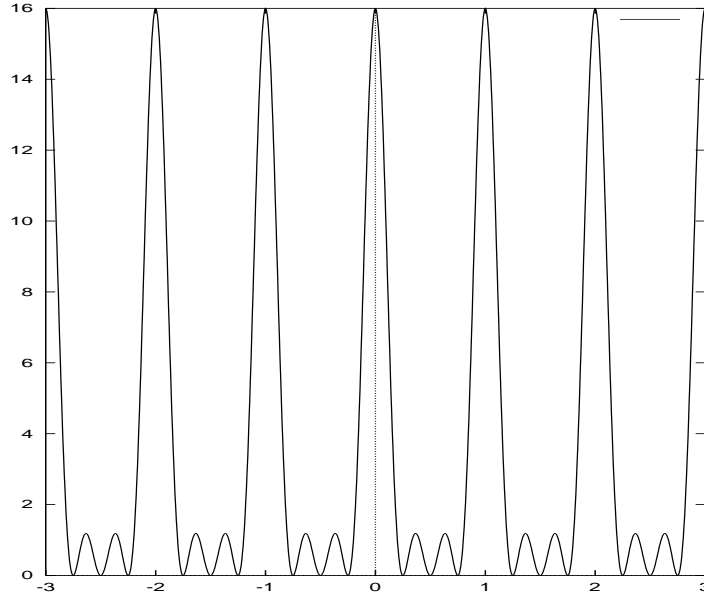


Figura 4.8: Perfil de la funció que descriu la intensitat de les interferències per a  $N=4$

Es pot comprovar que

$$\left| \frac{1 - \exp(-\frac{2\pi i x(N-1)P}{\lambda z})}{1 - \exp(-\frac{2\pi i x P}{\lambda z})} \right|^2 = \frac{\sin^2(\pi N P x / \lambda z)}{\sin^2(\pi P x / \lambda z)}; \quad (4.49)$$

i per tant, la intensitat s'escriu com

$$I(x, y, z) \propto A^2 \left| F\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right) \frac{\sin^2(\pi N P x / \lambda z)}{\sin^2(\pi P x / \lambda z)} \right|. \quad (4.50)$$

Alguns comentaris addicionals:

- L'expressió de la intensitat ens indica que la distribució de llum que detectarem és el producte de la difracció de l'objecte per un terme interferencial.
- El numerador del terme interferencial s'anul·la quan es verifica que  $N P x = n \lambda z$ , on  $n$  és un natural. Per tant, quan  $x = n \lambda z / N P$ , la intensitat s'anul·la (passa per un mínim). Entre dos mínims tenim un màxim secundari (vegeu la figura 4.8).
- El denominador del terme interferencial s'anul·la quan es verifica que  $P x = n \lambda z$ , on  $n$  és un natural. És fàcil comprovar que, en aquests punts on el denominador s'anul·la, també s'anul·la el numerador. Desfent la indeterminació pot comprovar-se que el terme interferencial val  $N^2$  (màxim principal) (vegeu la figura 4.8).
- Si el nombre d'objectes és  $N$ , entre dos màxims principals tenim  $N - 1$  mínims i  $N - 2$  màxims secundaris.
- Si  $N = 2$ , el terme interferencial s'escriu

$$I(x, y, z) \propto 4 \cos^2\left(\frac{\pi Px}{\lambda z}\right), \quad (4.51)$$

que correspon a la intensitat de les interferències generades per dos fonts puntuals de llum (*Experiment de Young*).

- Per exemple, la intensitat de la difracció de Fraunhofer que generen dos objectes quadrats de costat  $l$  separats una distància  $P$  s'escriu

$$I(x, y, z) \propto 4A^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{lx}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{ly}{\lambda z}\right) \cos^2\left(\frac{\pi Px}{\lambda z}\right). \quad (4.52)$$