1-ELIMINACION DE IMAGINARIOS EN LOS CUERPOS ALGEBRAICAMENTE CERRADOS CON VALORACIÓN

Rodrigo Peláez

Universitat de Barcelona. 2004.

Índice

1 Introducción

El estudio de los imaginarios y la eliminación de imaginarios tiene su inicio a finales del siglo pasado principalmente en los trabajos de Shelah ([9]), Makkai ([8]) y Poizat ([1]). Dado un subconjunto definible $D \subseteq \mathbb{C}$ del modelo monstruo de una teoría (que se introducirá más adelante), se dice que una tupla c de elementos imaginarios es un parámetro canónico de D si para cada automorfismo f de la estructura imaginaria se tiene que f fija D como conjunto (no necesariamente elemento a elemento) si y sólo si fija la tupla c. Los imaginarios se definen como las clases de equivalencia de las relaciones de equivalencia en $\mathbb{C}^n$ definibles sin parámetros. Es interesante tener parámetros canónicos para los subconjuntos definibles de $\mathbb{C}$; y una manera de asegurar su existencia es pasando al universo imaginario $\mathbb{C}^{eq}$ añadiendo nuevas suertes para cada uno de los universos cocientes por las distintas relaciones de equivalencia 0-definibles. En algunos casos ocurre que existen estos parámetros canónicos en $\mathbb{C}$ para todos los conjuntos definibles (e.d. que los parámetros canónicos son reales), y se dice entonces que la teoría tiene *eliminación de imaginarios*, haciendo referencia a que no hay necesidad de añadirlos para conseguir los parámetros canónicos. Sin embargo, existen casos intermedios en los que la teoría inicial no tiene eliminación de imaginarios pero se pueden conseguir parámetros canónicos para todos los subconjuntos definibles añadiendo sólo pocas suertes.

Es sabido, por ejemplo, que la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados elimina imaginarios (véase [1]). El año pasado D. Haskell, E. Hrushovski y D. Macpherson lograron mostrar en [4] que la teoría de cuerpos valorados algebraicamente cerrados elimina imaginarios añadiendo sólo unas pocas y naturales suertes al lenguaje. La teoría que desarrollaron para mostrar dicho resultado tiene un alcance más general y profundiza en temas de independencia para n-tipos, lo que abarca un territorio mucho más amplio del que se trata en este trabajo, pero el camino que siguieron para probar la eliminación de imaginarios es claramente motivado en principio por las nociones y resultados presentados por J. E. Holly en [7], donde se muestra que existe un tipo particular de eliminación de imaginarios para subconjuntos definibles del cuerpo en una variable en el caso en el que el cuerpo valorado y su cuerpo residual tienen característica cero. En el trabajo de Holly se desarrolla la teoría de los *prototipos* para dicho fin y el camino hacia la prueba de eliminación de imaginarios sigue un enfoque sintáctico que dificulta en algunos casos entender de manera clara las propiedades básicas de los modelos de esta teoría que se están utilizando.

El objetivo de este trabajo es entonces dar una nueva prueba más breve del resultado obtenido en [7] utilizando herramientas clásicas de la teoría de modelos para mirar en detalle el comportamiento de los conjuntos definibles bajo la acción de los automorfismos de los modelos de la teoría en cuestión; y de esta manera poder entender de manera más clara qué propiedades a nivel de las estructuras son importantes para que pueda darse tal tipo de eliminación de imaginarios. Es importante aclarar que si bien el enfoque de la prueba expuesta en este trabajo es distinta, en muchos casos las pruebas de las proposiciones y lemas son adaptaciones de las presentadas en [7], y algunas hábiles manipulaciones algebraicas son tomadas directamente de éstas.

En la siguiente sección se introducen los imaginarios y distintos tipos de eliminación de imaginarios, junto con algunas equivalencias y resultados clásicos obtenidos en relación a éstos y relevantes para el objetivo de este trabajo. En la tercera sección se introduce la teoría de los cuerpos valorados algebraicamente cerrados, se presenta el resultado principal obtenido por Holly en [6] que caracteriza de manera muy útil los subconjuntos del cuerpo valorado en una variable en términos de nuevos objetos llamados discos, y se introduce la estructura multivalorada con la que se trabajará para poder tener parámetros canónicos asociados a dicho tipo de subconjuntos. En la cuarta sección se introduce la teoría de los árboles y conjuntos valorados y los principales resultados y conceptos asociados, presentados en [7], que permiten clasificar y analizar de manera muy fina los conjuntos finitos de discos, protagonistas durante el resto del trabajo. La quinta sección se encarga de presentar las principales propiedades relacionadas con las operaciones entre los discos y los árboles valorados construidos sobre conjuntos finitos de éstos. Finalmente, en la sexta sección se construyen parámetros canónicos para los conjuntos finitos de discos y se prueba entonces la existencia de parámetros canónicos para los subconjuntos definibles del cuerpo en una variable.

Se denotará por $\mathbb{C}$ al *modelo monstruo* de la teoría, un modelo saturado cuyo universo es una clase propia. Todo modelo de la teoría se verá como un submodelo elemental de $\mathbb{C}$ y todo conjunto de parámetros se verá como un subconjunto de $\mathbb{C}$.

Si a es un elemento o una sucesión de elementos y A es un conjunto de parámetros, se denotará por $tp(a/A)$ al tipo de A sobre A, el conjunto de fórmulas con parámetros en A satisfechas por a. Se denotará por $Aut(\mathbb{C}/A)$ al conjunto de los automorfismos f de $\mathbb{C}$ que fijan A elemento por elemento, e.d., tales que $f(a) = a$ para cada $a \in A$. La siguiente propiedad de $\mathbb{C}$ es muy útil y frecuentemente utilizada: si dos sucesiones de elementos a y b (posiblemente infinitas) tienen el mismo tipo sobre un conjunto de parámetros A, existe entonces un automorfismo $f \in Aut(\mathbb{C}/A)$ tal que $f(a) = b$.

Dado un conjunto de parámetros $A \subseteq \mathbb{C}$, se dirá que un elemento o una sucesión de elementos a pertenece a la *clausura algebraica* de A, que se denotará por $acl(A)$, si existe una fórmula $\varphi(x)$ con parámetros en A tal que $a \models \varphi(x)$ y el conjunto de realizaciones de $\varphi(x)$ en $\mathbb{C}$, $\varphi(\mathbb{C})$, es finito. Se dirá que a pertenece a la *clausura definible* de A, que se denotará por $dcl(A)$, si existe una fórmula $\varphi(x)$ con parámetros en A tal que $\varphi(\mathbb{C}) = \{a\}$. Equivalentemente, se dice que $a \in acl(A)$ si la órbita de a bajo $Aut(\mathbb{C}/A)$ es finita y que $a \in dcl(A)$ si la órbita de a bajo $Aut(\mathbb{C}/A)$ tiene un sólo elemento.

Agradezco la dirección y las valiosas ideas que Rafel Farré ha aportado y que permitieron la elaboración de este trabajo.

2 Eliminación de Imaginarios

En esta sección se introducen los imaginarios y se presentan algunas equivalencias y resultados importantes al respecto. La mayoría del material aquí presentado puede encontrarse en [3] y [1].

Definición 2.1. Un *imaginario* es una clase de equivalencia a/E de una tupla $a \in \mathbb{C}^n$ (para algún $n \in \omega$) con respecto a una relación de equivalencia $\emptyset$-definible E.

La primera aparición de los imaginarios fue debido a Shelah en [9]. Lo que hizo fue introducir en el lenguaje un nuevo símbolo de predicado P_E para cada relación de equivalencia $\emptyset$-definible E y un nuevo símbolo funcional π_E. Definió entonces el universo imaginario $\mathbb{C}^{eq}$ como una expansión de $\mathbb{C}$ en el nuevo lenguaje donde cada P_E es interpretado como el universo cociente con respecto a E y cada π_E interpretado como la proyección que envía a cada tupla a de $\mathbb{C}$ en su respectiva clase de equivalencia a/E.

Posteriormente Makkai en [8] propuso construir $\mathbb{C}^{eq}$ como una estructura multivalorada introduciendo, para cada relación de equivalencia $\emptyset$-definible, una nueva suerte asociada al cociente $\mathbb{C}/E$ y la respectiva proyección π_E. El universo $\mathbb{C}$ puede identificarse así con su cociente por medio de la igualdad. Desde entonces esta es la manera acostumbrada para construir $\mathbb{C}^{eq}$ y de esta forma cada modelo M de T resulta tener una única expansión a un modelo M^{eq} de la teoría T^{eq} de $\mathbb{C}^{eq}$.

Es importante observar también que de esta manera todo automorfismo f de $\mathbb{C}$ se extiende de manera única a un automorfismo $\bar{f}$ de $\mathbb{C}^{eq}$, donde para cada imaginario $e = a/E$, $\bar{f}(e) = \pi_E(f(a))$.

Guiado por el interés de saber cuándo el paso de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}^{eq}$ era innecesario, Poizat en [1] introdujo las nociones de eliminación de imaginarios.

Definición 2.2. Sea T una teoría de primer orden.

1. T elimina imaginarios (tiene EI) si cada imaginario es interdefinible con una tupla real, es decir, si para cada $e \in \mathbb{C}^{eq}$ existe una tupla $a \in \mathbb{C}^n$ (para algún $n \in \omega$) tal que $dcl^{eq}(a) = dcl^{eq}(e)$.

2. T elimina débilmente imaginarios si para cada imaginario $e \in \mathbb{C}^{eq}$ existe una tupla $a \in \mathbb{C}^n$ (para algún $n \in \omega$) tal que $e \in dcl^{eq}(a)$ y $a \in acl^{eq}(e)$

Dado un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ y un automorfismo $f \in Aut(\mathbb{C})$, se utilizará la notación $f(D) = D$ para decir que D queda fijo como conjunto (se permutan sus elementos) bajo f.

Definición 2.3. Sea D un subconjunto definible de $\mathbb{C}$. Se dice que una tupla $c \in (\mathbb{C}^{eq})^n$ es un *parámetro canónico* de D si para cada automorfismo $f \in Aut(\mathbb{C}^{eq})$,

$$f(c) = c \text{ ssi } f(D) = D.$$

Si c es una tupla de elementos de $\mathbb{C}$, se dice que es un *parámetro canónico real*.

Los siguientes resultados son bien conocidos y pueden encontrarse en [1] y [2].

Proposición 2.4. *Las siguientes son equivalentes:*

i) T tiene EI.

ii) Para cada conjunto definible (posiblemente con parámetros) de $\mathbb{C}^n$ (para cualquier $n \in \omega$) existe un parámetro canónico real.

Proposición 2.5. *Las siguientes son equivalentes:*

1. *T tiene Eliminación débil de imaginarios.*

2. *Para cada subconjunto definible $D \subseteq \mathbb{C}^n$ existe un conjunto finito A de tuplas de $\mathbb{C}$ tal que para todo automorfismo $f \in Aut(\mathbb{C})$ se tiene que $f(A) = A$ si y sólo si $f(D) = D$.*

Definición 2.6. Se dice que una teoría T tiene *1-eliminación de imaginarios* (1-EI) si para cada conjunto definible $D \subseteq \mathbb{C}$ (¡en una variable!) existe un parámetro canónico real.

Poizat probó que la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados tiene eliminación de imaginarios. El siguiente criterio es muy útil para probar eliminación de imaginarios en ciertos contextos y se utiliza para dar la prueba de 1-eliminación de imaginarios que se presenta en este trabajo.

Definición 2.7. Se dice que T codifica los conjuntos finitos si para cada conjunto finito $A \subseteq \mathbb{C}^n$ $(n \in \omega)$ existe un parámetro canónico.

Lema 2.8. *Una teoría T tiene eliminación de imaginarios si y sólo si tiene eliminación débil de imaginarios y además codifica los conjuntos finitos.*

Demostración. Supóngase que T tiene EI y además codifica los conjuntos finitos. Sea D un conjunto definible de $\mathbb{C}$. Al tener eliminación débil, por la proposición 2.5 existe un conjunto finito de tuplas $A \subseteq \mathbb{C}^n$ tal que para todo $f \in Aut(\mathbb{C})$, $f(D) = D$ ssi $f(A) = A$. Como T codifica los conjuntos finitos, existe un parámetro canónico c para A. Nótese entonces que si $f \in Aut(\mathbb{C})$,

$$f(D) = D \Leftrightarrow f(A) = A \Leftrightarrow f(c) = c,$$

con lo cual c es también un parámetro canónico para D. La otra implicación es clara. $\square$

El siguiente hecho es bien conocido también, y su prueba se basa esencialmente en el uso de las funciones simétricas.

Hecho 2.9. *Si $T \supseteq ACF$, donde ACF es la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados, entonces T codifica los conjuntos finitos.*

3 Cuerpos Valorados

DEFINICIÓN 3.1. Un cuerpo valorado es un cuerpo K junto con una función de valoración $|\ | : K \to \Gamma_0$, donde Γ_0 es un grupo abeliano multiplicativo totalmente ordenado junto con un nuevo símbolo, 0, tal que $0 < \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y tal que para cualesquiera $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, si $\gamma_1, \gamma_2 > 1$ entonces $\gamma_1 \cdot \gamma_2$. La función de valoración debe cumplir las siguientes condiciones:

1. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$
2. $|xy| = |x||y|$
3. $|x + y| \leq \text{máx}\{|x|, |y|\}$, y si $|x| \neq |y|, |x + y| = \text{máx}\{|x|, |y|\}$

Dado un cuerpo valorado K, los siguientes objetos asociados son de especial interés:

1. El *Anillo de valoración*, dado por $R = \{x \in K : |x| \leq 1\}$.
2. El *Ideal maximal* del anillo de valoración, dado por $M = \{x \in K : |x| < 1\}$.
3. El *Cuerpo residual*, dado por $k = R/M$
4. La función $res : R \to k$, que envía cada elemento de R a su respectiva clase módulo M
5. Dados $b \in K$ y $\gamma \in \Gamma$, el subconjunto de K dado por $\{x \in K : |x - b| \leq \gamma\}$ se conocerá como el *disco cerrado* con *centro* b y *radio* γ. La clase de los discos cerrados de K se denotará por $\mathcal{D}$.
6. Análogamente, dados $b \in K$ y $\gamma \in \Gamma$, el subconjunto de K dado por $\{x \in K : |x - b| < \gamma\}$ se conocerá como el *disco abierto* con *centro* b y *radio* γ. La clase de los discos abiertos de K se denotará por $\mathcal{O}$.

Es fácil ver que si K es algebraicamente cerrado, entonces k también lo será. En caso de que ambos tengan característica cero, se dirá que K es un cuerpo valorado algebraicamente cerrado de equi-característica cero.

Dado un disco (abierto o cerrado) D, se denotará por $rad(D)$ al radio de D. Las siguientes son algunas propiedades interesantes de los discos que se deducen fácilmente y que se utilizarán constantemente a lo largo del trabajo.

PROPIEDADES 3.2. *Sea K un cuerpo valorado y $\mathcal{D}$ y $\mathcal{O}$ sus clases asociadas de discos cerrados y abiertos.*

1. *Dados dos discos disjuntos D, E (en $\mathcal{D}$ o $\mathcal{O}$), existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $|x - y| = \gamma$ $\forall x \in D, y \in E$. Tal γ se denotará por $|D - E|$.*
2. *Dado un disco D, todo $b \in D$ es centro de D.*
3. *Dados dos discos disjuntos D, E (en $\mathcal{D}$ o $\mathcal{O}$), si $D \cap E \neq \emptyset$, entonces $D \subseteq E$ o $E \subseteq D$.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Sean D_1, D_2 dos discos disjuntos con centros en b_1 y b_2 y de radios γ_1 y γ_2 respectivamente. Sean $c_1 \in D_1$ y $c_2 \in D_2$ dos elementos cualesquiera. Nótese que

$$\begin{aligned} |c_1 - c_2| &= |(c_1 - b_1) + (b_1 - b_2) + (b_2 - c_2)| \\ &= \text{máx}\{|c_1 - b_1|, |b_1 - b_2|, |b_2 - c_2|\} \\ &= |b_1 - b_2|, \end{aligned}$$

pues los discos son disjuntos y entonces sus centros estarán a una distancia mayor estrictamente que $\max\{\gamma_1, \gamma_2\}$ si alguno de los dos discos es cerrado, o mayor o igual a $\max\{\gamma_1, \gamma_2\}$ en caso de que ambos discos fueran abiertos.
2. Sea D un disco con centro en b y radio γ y sea c un elemento arbitrario de D. Supóngase que D es cerrado (la prueba para el caso abierto es análoga). Se verá que si E es el disco cerrado con centro en c y radio γ, entonces $D = E$. Pues bien, sea $x \in D$. Nótese que

$$\begin{aligned} |x-c| &= |(x-b)+(b-c)| \\ &\leq \max\{|x-b|, |b-c|\} \\ &\leq \gamma, \end{aligned}$$

con lo cual $D \subseteq E$. Análogamente, si $x \in E$, nótese que

$$\begin{aligned} |x-b| &= |(x-c)+(c-b)| \\ &\leq \max\{|x-c|, |c-b|\} \\ &\leq \gamma, \end{aligned}$$

verificándose entonces que $D = E$.
3. Sean D_1, D_2 dos discos cualesquiera de radios γ_1 y γ_2 respectivamente y sea $c \in D_1 \cap D_2$ un elemento que pertenece a ambos discos. Por el resultado anterior D_1 y D_2 son discos con centro en c y radios γ_1 y γ_2. Dependiendo si los discos son cerrados o abiertos y si $\gamma_1 \leq \gamma_2$ o si $\gamma_1 > \gamma_2$, se ve claramente que $D_1 \subseteq D_2$ o $D_2 \subseteq D_1$. $\square$

A continuación se presentará el resultado obtenido en [6] que describe de manera precisa los subconjuntos definibles en una variable de los cuerpos valorados algebraicamente cerrados y que motiva la construcción de la estructura multivalorada en la que se tendrá la 1-eliminación de imaginarios para subconjuntos definibles del cuerpo. Los discos recién introducidos serán la base de dichos subconjuntos definibles.

Definición 3.3. En un cuerpo valorado K, un *Queso Suizo* es un subconjunto no vacío de K de la forma $D \setminus (E_1 \dot\cup \ldots \dot\cup E_n)$, donde D es un disco (o todo K) y cada E_i es un subdisco propio de D. D se conocerá como el *bloque* del queso suizo y los E_i's como los *huecos*.

Teorema 3.4 (Holly). *Todo subconjunto definible (con parámetros) en una variable $D \subseteq K$ de un cuerpo valorado algebraicamente cerrado es la unión de un único conjunto $\{S_1, \ldots, S_n\}$ de quesos suizos disjuntos no anidados, es decir, tales que para ningún i, j, el bloque de S_i coincide con un hueco de S_j.*

En [5] se muestra que la teoría de los cuerpos valorados algebraicamente cerrados de equi-característica cero no tiene eliminación de imaginarios; y que incluso no se tiene añadiendo nuevas suertes para el grupo de valores y el cuerpo residual. Sin embargo se verá que con el fin de tener parámetros canónicos para los subconjuntos definibles en una variable del campo, es suficiente añadir a la estructura nuevas suertes para las clases de discos.

La estructura multivalorada con la que se trabajará de ahora en adelante estará dada por

$$\mathcal{K} = (K, \Gamma_0, k, \mathcal{D}, \mathcal{O}, |\ \ |, res, o, d),$$

donde

- K, el cuerpo valorado, es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero sobre el lenguaje de cuerpos $\{+, \cdot, 0, 1\}$.

- Γ_0, el grupo de valores aumentado, es un grupo abeliano multiplicativo ordenado junto con un nuevo símbolo, 0, sobre el lenguaje $\{\cdot, 1, 0\}$.
- k, el cuerpo residual, es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero sobre el lenguaje de cuerpos $\{+, \cdot, 0, 1\}$.
- $\mathcal{D}$ es el espacio de discos cerrados.
- $\mathcal{O}$ es el espacio de discos abiertos.
- $|\ | : K \to \Gamma_0$ es la valoración.
- $cd : K \times \Gamma_0 \to \mathcal{D}$ es la función que le asigna que al par (b, γ) el disco cerrado con centro en b y radio γ, es decir, $cd(b, \gamma) = \{x \in K : |x - b| \leq \gamma\}$.
- $od : K \times \Gamma_0 \to \mathcal{O}$ es la función que al par (b, γ) le asigna el disco abierto con centro en b y radio γ, es decir, $co(b, \gamma) = \{x \in K : |x - b| < \gamma\}$.

La teoría multivalorada de cuerpos algebraicamente cerrados de equi-característica cero asociada a la anterior estructura se denotará por $ACVF'_{0,0}$.

Nótese que las nociones de eliminación de imaginarios y eliminación débil de imaginarios fueron formuladas para estructuras univaloradas, mientras que aquí se trabaja con una estructura multivalorada. De esta manera, al hablar de 1-eliminación de imaginarios (o eliminación débil) en $ACVF'_{0,0}$, se especificará la suerte de los conjuntos definibles asociados a los imaginarios en cuestión. Es decir, al ver, por ejemplo, que hay parámetros canónicos para subconjuntos definibles del cuerpo valorado en una variable (objetivo de este trabajo), se dirá que $ACVF'_{0,0}$ tiene 1-eliminación de imaginarios para la suerte correspondiente al cuerpo valorado.

Los siguientes resultados pueden verse en [4] y permiten ver que $ACVF'_{0,0}$ tiene 1-eliminación de imaginarios para las suertes Γ_0 y k correspondientes al grupo de valores y al cuerpo residual.

Definición 3.5. Sea T una teoría de primer orden sobre un lenguaje $\mathcal{L}$ y sea p un tipo parcial sobre $\emptyset$. Se dice que p está *establemente inmerso* en $\mathbb{C}$ si para todo conjunto definible $D \subseteq \mathbb{C}^n$ (para cualquier $n \in \omega$) existe un $D' \subseteq \mathbb{C}$ $p(\mathbb{C})$-definible tal que que $D \cap (p(\mathbb{C}))^n = D' \cap (p(\mathbb{C}))^n$.

Si $P = p(\mathbb{C})$ y p está establemente inmerso en $\mathbb{C}$ es usual decir que P está establemente inmerso en $\mathbb{C}$. Como Γ_0 y k son definibles en $\mathcal{K}$, se hablará de que Γ_0 y k están establemente inmersos en $\mathcal{K}$ en este sentido. En la proposición 2.1.3 de [4] se prueba precisamente que:

Proposición 3.6. *i)* Γ_0 *está establemente inmerso en* $\mathbb{C}$.

ii) k *está establemente inmerso en* $\mathbb{C}$

Por otro lado, como la teoría de grupos abelianos ordenados divisibles (la teoría asociada a Γ_0) y la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero (la teoría asociada a k) tienen eliminación de cuantificadores, junto con el anterior resultado puede verse que:

1. Cada subconjunto $\mathcal{K}$-definible de Γ_0 es una unión finita de puntos e intervalos, y por lo tanto tiene un parámetro canónico dado por la tupla de los puntos y extremos de los intervalos.
2. Cada subconjunto $\mathcal{K}$-definible de k es finito o cofinito, y por lo tanto tiene un parámetro canónico dado que la teoría de k codifica los conjuntos finitos.

De esta manera se tiene que $ACVF'_{0,0}$ tiene 1-eliminación de imaginarios para las suertes Γ_0 y k.

Análogamente a la definición de 1-eliminación de imaginarios introducida en la sección pasada, se dice que una teoría tiene *1-eliminación débil de imaginarios* si para cada conjunto definible (¡en una variable!) $D \subseteq \mathbb{C}$ existe un conjunto finito A de tuplas de $\mathbb{C}$ tal que para todo automorfismo $f \in Aut(\mathbb{C})$ se tiene que $f(A) = A$ si y sólo si $f(D) = D$.

Nótese que con el teorema de Holly (teorema 3.4) se concluye entonces que $ACVF'_{0,0}$ tiene 1-eliminación débil de imaginarios para subconjuntos definibles del cuerpo, pues dado un subconjunto definible $A \subseteq K$, el conjunto finito S de los discos de los quesos suizos que aparecen en su descomposición es tal que para cada $f \in Aut(\mathcal{K})$, $f(A) = A$ ssi $f(S) = S$, donde $f(S) = S$ significa que los discos de S se permutan entre sí bajo f. La implicación de izquierda a derecha es clara. Para la otra dirección basta ver que la imagen bajo un automorfismo de un bloque será de nuevo un bloque y que la imagen de un hueco será un hueco. Sea entonces $S = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ el conjunto de todos los discos (sin repeticiones) que aparecen en la descomposición en quesos suizos de un subconjunto definible $A \subseteq K$. Para cada $D \in S$, considérese el número

$$n_D = |\,\{E \in S : D \subseteq E\}\,|,$$

el número de discos de S en los que D está incluido. Nótese que este número se respetará bajo automorfismos, es decir, para cada $f \in Aut(\mathcal{K})$ se tiene que

$$n_{f(D)} = n_D.$$

Pues bien, nótese que n_D es impar si y sólo si D es un bloque y es par si y sólo si D es un hueco. Se tiene entonces lo que se quería.

Lo que se hará en la última sección es precisamente construir parámetros canónicos para conjuntos finitos de discos. Para esto será importante clasificar el espacio de los discos de manera muy fina; y con este fin, dada su estructura arbórea intrínseca, se introducirá en la siguiente sección la teoría desarrollada por Holly en [6] y [7] con relación a conjuntos y árboles valorados.

4 Árboles y conjuntos valorados

DEFINICIÓN 4.1. Sea S un conjunto y Γ un conjunto totalmente ordenado. Se define inductivamente un Γ-*árbol sobre* S, su *valor* en $\Gamma \dot{\cup} \{0\}$ y sus *hojas* de la siguiente manera.

i) Si $b \in S$, $(b, 0)$ es un Γ-árbol valorado atómico con una sola hoja, b, y con valor 0. El valor 0 se define como $< \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

ii) Sean $T_1, ..., T_n$, $n \geq 2$, Γ-árboles valorados cuyos conjuntos de hojas son disjuntos por pares, y cuyos valores respectivos son $\gamma_1, ..., \gamma_n$. Si $\gamma \in \Gamma$ es tal que $\gamma > \gamma_i$ $(i \in \{1, 2, ..., n\})$, entonces el par $(\{T_1, ..., T_n\}, \gamma)$ es de nuevo un Γ-árbol valorado, T, con valor γ. b es una hoja de T ssi b es hoja de algún T_i.

DEFINICIÓN 4.2. Un *subárbol* de un Γ-árbol valorado T es cualquier Γ-árbol valorado utilizado en su construcción. Así, si $U = (\mathcal{T}, \gamma)$ es un Γ-árbol valorado, entonces cada $T \in \mathcal{T}$ es un subárbol de U.

Nótese que dados dos subárboles T_1, T_2 de un Γ-árbol T, o bien T_1 es un subárbol de T_2, o T_2 es un subárbol de T_1, o sus conjuntos de hojas son disjuntos. También, si b y c son hojas del árbol T, existe el subárbol más pequeño de T que contiene a b y c (de ahora en adelante $b \in T$ significará que b pertenece al conjunto de hojas de T). Su valor se denotará por $d_T(b, c)$. Así, dos hojas de un árbol estarán "más cerca", mientras menor sea $d_T(b, c)$.

DEFINICIÓN 4.3. Un conjunto valorado es un conjunto Q con una función asociada $d : Q \times Q \to \Gamma \dot{\cup} \{0\}$ $(0 < \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma)$ que llega a un conjunto totalmente ordenado donde $\forall \gamma \in \Gamma$, $0 < \gamma$, y tal que:

i) $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ para cualquier $z \in Q$. De aquí se sigue que si $d(x, z) \neq d(y, z)$, entonces $d(x, y) = max\{d(x, z), d(y, z)\}$.

Nótese que un cuerpo valorado puede verse como un conjunto valorado donde la función asociada $d : K \times K \to \Gamma_0$ viene dada por

$$d(x, y) = |x - y|.$$

De manera análoga, como se notará en la siguiente sección, las clases de discos abiertos (cerrados) del mismo radio, pueden verse también como conjuntos valorados.

PROPOSICIÓN 4.4. *Sea S un subconjunto finito no vacío de Q, donde Q es un conjunto valorado con $d : Q \times Q \to \Gamma_0$. Entonces existe un único Γ-árbol valorado T sobre S tal que $\forall x, y \in S$ se tiene que $d(x, y) = d_T(x, y)$.*

DEMOSTRACIÓN. *Existencia.* Se mostrará por inducción en $|S|$. Si $S = \{b\}$, el árbol deseado es $(b, 0)$. Supóngase entonces que S tiene más de un elemento. Sea $\gamma = \text{máx}\{d(x, y) : x, y \in S\}$ y sea $\sim$ la relación de equivalencia en S dada por

$$x \sim y \text{ si y sólo si } d(x, y) < \gamma.$$

Sean $S_1, S_2, \ldots, S_n$ las $\sim$-clases de equivalencia. Claramente para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $|S_i| < |S|$. Por hipótesis de inducción, existen árboles valorados $T_1, \ldots, T_n$ sobre

$S_1, \ldots, S_n$ respectivamente con las propiedades deseadas. El árbol $(\{T_1, \ldots, T_n\}, \gamma)$ es entonces el árbol deseado.
Unicidad. Si S tiene un sólo elemento no hay nada que probar. Supóngase entonces que $T = (\{T_1, \ldots, T_n\}, \gamma)$ y $U = (\{U_1, \ldots, U_m\}, \delta)$ son dos Γ-árboles sobre S con las propiedades deseadas. Supóngase que $\gamma \neq \delta$; sin pérdida de generalidad, que $\delta < \gamma$. Nótese que cualesquiera dos elementos de S que estén en distintos T_i's estarían a distancia γ, mientras que esto es imposible para cualesquiera dos elementos en cualesquiera U_i's, con lo cual $\gamma = \delta$. Supóngase entonces que $\{T_1, \ldots, T_n\} \neq \{U_1, \ldots, U_n\}$. Nótese que los conjuntos de hojas de los T_i's y los U_i's forman particiones de S. Sean b y c dos elementos de S que estén en un mismo T_i pero en distintos U_i's. De acuerdo con T, $d(b,c) < \gamma$, pero de acuerdo con U, $d(b,c) = \gamma$, con lo cual se tiene una contradicción y se concluye que $n = m$ y $\{T_1, \ldots, T_n\} = \{U_1, \ldots, U_n\}$, como conjuntos de conjuntos de hojas. Sin pérdida de generalidad, supóngase que cada T_i tiene el mismo conjunto de hojas que U_i. Por hipótesis de inducción se tiene entonces que $T_i = U_i$ y por tanto que $T = U$. $\square$

De ahora en adelante un árbol valorado sobre un subconjunto finito de un conjunto valorado será precisamente el árbol recién descrito.

Con el fin de descomponer los árboles valorados construidos sobre conjuntos finitos de conjuntos valorados y poder clasificar y analizar más detalladamente los conjuntos finitos de discos en las siguientes secciones, se introducen a continuación los *clusters* de los árboles valorados.

Definición 4.5. Sea T un Γ_0-árbol valorado. Para cada subárbol de T de la forma $(\{b_1, \ldots, b_n, U_1, \ldots, U_m\}, \gamma)$ ($n \geq 1$, $m \geq 0$ y $\gamma > 0$), donde $b_1, \ldots b_n$ son atómicos y $U_1, \ldots, U_m$ no lo son, el conjunto $\{b_1, \ldots, b_n\}$ es un *n-cluster* en T, o simplemente un *cluster* en T. Si $T = (b, 0)$ es un Γ-árbol atómico, entonces $\{b\}$ es un 1-cluster en T.

Nótese que como cada hoja de un árbol valorado T no atómico aparece de la forma descrita anteriormente en un subárbol de T una sola vez, los clusters en T forman una partición de su conjunto de hojas.

Definición 4.6. Sea T un Γ_0-árbol valorado sobre un conjunto S. Dados $q, n_q, n_{q-1}, \ldots, n_1$ enteros positivos, se definen ciertos subconjuntos C de S llamados *$(n_q, \ldots, n_1)$-clusters* en T, y se le asigna, a cada C, su *i-ésima altura*, $h_i(C)$, para cada $i \in \{1, \ldots, q\}$, que será un elemento de Γ_0. La definición es por inducción en q.

1. Si $q = 1$ y $n_1 = n$, se trata de un n-cluster $C = \{b_1, \ldots, b_n\}$ en T. Si C aparece en un subárbol de la forma $(\{b_1, \ldots, b_n, U_1, \ldots, U_m\}, \gamma)$ donde $U_1, \ldots, U_m$ son no atómicos, $h_1(C) = \gamma$.

Observación 1. Si C_1 y C_2 son dos n-clusters distintos en T, con la misma altura, existe un $\delta \in \Gamma_0$ tal que para cada $b \in C_1$ y $c \in C_2$, $d(c_1, c_2) = \delta$. Para ver esto supóngase que C_1 proviene de un subárbol $S_1 = (\{b_1, \ldots, b_n, U_1, \ldots, U_m\}, \gamma)$ y C_2 de un subárbol $S_2 = (\{c_1, \ldots, c_n, V_1, \ldots, V_p\}, \gamma)$. Nótese que ninguno puede incluir al otro porque tienen el mismo valor, con lo cual son disjuntos. Así, dado $b_i \in C_1$ y $c_j \in C_2$, el menor subárbol que contiene a b_i y c_j es precisamente el mínimo subárbol de T que contiene a S_1 y a S_2; sea $\delta > \gamma$ su valor. Entonces $d(b_i, c_j) = \delta$. $\square$

Observación 2. Análogamente puede verse que si C_1 y C_2 son dos $(n_p, \ldots, n_1)$-clusters distintos en T para algún $p \in \mathbb{N}$ tales que $h_i(C_1) = h_i(C_2)$ para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$, entonces existe un $\delta \in \Gamma$ tal que para cada $b \in C_1$ y $c \in C_2$, $v(b,c) = \delta$. Esto implica que C_1 y C_2 son disjuntos y también que si $C_1, \ldots C_k$ son $(n_p, \ldots, n_1)$-clusters distintos en T para algún $p \in \mathbb{N}$ tales que $h_i(C_1) = \cdots = h_i(C_k)$ para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$, entonces el conjunto $\{C_1, \ldots, C_k\}$ puede verse a su vez como un conjunto valorado, definiendo, para $i \neq j$, $d(C_i, C_j) = d(b_1, b_j)$ para cualesquiera $b_i \in C_i, b_j \in C_j$, o equivalentemente, como el valor del mínimo subárbol de T que contiene a C_i y C_j.

2. Si $q > 1$, sean $n_1, \ldots, n_{q-1}$ enteros positivos y $\gamma_1 < \ldots < \gamma_{-1}$ elementos de Γ_0. Supóngase que $C_1, \ldots, C_k$ $(k > 2)$ son todos los $(n_{q-1}, \ldots, n-1)$-clusters en T tales que $h_i(C_1) = \cdots = h_i(C_k)$ para cada $i \in \{1, \ldots, q-1\}$. De las observaciones anteriores se tiene que $(\{C_1, \ldots, C_k\}, \Gamma_0)$ es un conjunto valorado. Sea entonces T' su $\Gamma - 0$-árbol. Si $D' = \{D_1, \ldots D_m\} \subseteq \{C_1, \ldots, C_k\}$ es un m-cluster en T', entonces $D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$ es un m-cluster en T cuya q-ésima altura $h_q(D)$ será el valor de $h_q(D')$ como m-cluster de T' y tal que $h_i(D) = h_i(C_1)$ para $i \in \{1, \ldots, q-1\}$.

Por ejemplo, en la Figura 1 correspondiente al árbol valorado T sobre $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, puede verse que $\{a, b\}, \{d, e\}$ son todos los 2-clusters en T con altura primera γ_2 y $\{a, b, d, e\}$ es un $(2, 2)$-cluster con primera altura γ_2 y segunda altura γ_4.

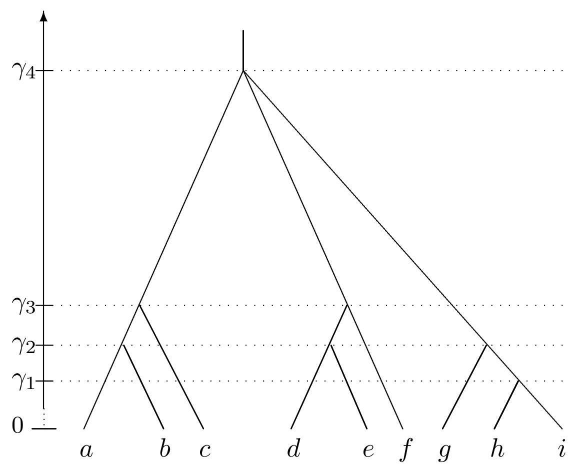

Figura 1

5 El álgebra de los discos

En esta sección se introducen los principales resultados relacionados con las operaciones entre discos y los árboles valorados construidos sobre conjuntos finitos de discos del mismo radio. Las pruebas que se presentan aquí son tomadas en su mayoría de [7] con leves cambios.

Dado un $\gamma \in \Gamma_0$, el conjunto de discos cerrados de radio γ se denota por $\mathcal{D}_\gamma$. Análogamente, el conjunto de discos abiertos de radio γ se denota por $\mathcal{O}_\gamma$.

Recuérdese (sección 3) que dados dos discos disjuntos no vacíos D, E, existe un $\gamma \in \Gamma_0$ de tal manera que para cualesquiera $a \in D, b \in E$, $|a - b| = \gamma$. Esto es una consecuencia inmediata de la propiedad no arquimediana de la valoración y permite tener una noción de distancia entre los discos $|D_1 - D_2| = \gamma$.

Lema 5.1. *Sea $\gamma \in \Gamma_0$. Entonces $\mathcal{D}_\gamma$ puede verse como un conjunto valorado con la función asociada $d : \mathcal{D}_\gamma \times D_\gamma \longrightarrow \mathcal{D}_\gamma$ dada por $d(D,E) = |D - E|$ si $D \neq E$, y $d(D,E) = 0$ si $D = E$.*
Análogamente, $\mathcal{O}_\gamma$ es un conjunto valorado.

Demostración. Basta notar que $|D - E|$ se comporta en los discos del mismo radio de igual manera que $|x - y|$ en los elementos del cuerpo valorado. □

Definición 5.2. La valoración en Γ_0 para un disco no vacío D, denotada por $|D|$ se define como el $sup\,\{|b| : b \in D\}$. Nótese que si $0 \notin D$, entonces $|D| = |a|$ para cualquier $a \in D$. Y si $0 \in D$, entonces $|D| = rad(D)$.

Dado un elemento no nulo del cuerpo $b \in K^*$ y un disco D en $\mathcal{D}$ o $\mathcal{O}$, se denota por bD al disco $\{bx : x \in D\}$. Para $-1D$, se escribirá simplemente $-D$. Es fácil ver que si $D = cd(0,\gamma)$, entonces $bD = cd(0,\gamma|b|)$; y análogamente si $D = od(0,\gamma)$.

Definición 5.3. Dados dos discos D, E, ambos en $\mathcal{D}$ o en $\mathcal{O}$, se define la suma y el producto entre discos de manera natural:

$$\begin{aligned} D + E &= \{x + y : x \in D, y \in E\} \\ DE &= \{xy : x \in D, y \in E\} \end{aligned}$$

Se verá más adelante que la suma y el producto de discos es de nuevo un disco.

Es importante anotar en este momento que si D, E son discos disjuntos, la distancia entre D y E mencionada al inicio de esta sección, $d(D,E)$, coincide con la valoración del disco que resulta al sumar los discos D y $-E$, $|D + (-E)|$.

Los siguientes resultados están expuestos claramente en el noveno capítulo de [7], y son de gran utilidad para la construcción de parámetros canónicos en la siguiente sección.

Proposición 5.4. *Sean $b_1, b_2 \in K$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0$. Sea $D_1 = cd(b_1,\gamma_1)$, $D_2 = cd(b_2,\gamma_2)$. Entonces:*

i) $D_1 + D_2 = cd(b_1 + b_2, \max\{\gamma_1,\gamma_2\})$

ii) $D_1 D_2 = cd(b_1 b_2, max\,\{\gamma_1|D_2|, |D_1|\gamma_2\})$

Lo mismo vale para los discos abiertos.

Demostración. *i*) Nótese que

$$\begin{aligned} D_1 + D_2 &= (b_1 + cd(0,\gamma_1)) + (b_2 + cd(0,\gamma_2)) \\ &= (b_1 + b_2) + (cd(0,\gamma_1) + cd(0,\gamma_2))) \\ &= (b_1 + b_2) + cd(0, max\,\{\gamma_1,\gamma_2\}) \\ &= cd(b_1 + b_2, max\,\{\gamma_1,\gamma_2\}) \end{aligned}$$

ii) Nótese que

$$\begin{aligned} D_1 \cdot D_2 &= (b_1 + cd(0,\gamma_1)) \cdot (b_2 + cd(0,\gamma_2)) \\ &= b_1b_2 + b_1 \cdot cd(0,\gamma_2) + b_2 \cdot cd(0,\gamma_1) + cd(0,\gamma_1) \cdot cd(0,\gamma_2) \\ &= b_1b_2 + cd(0,|b_1|\gamma_2) + cd(0,|b_2|\gamma_1) + cd(0,\gamma_1\gamma_2) \\ &= cd(b_1b_2, max\,\{|b_1|\gamma_2, |b_2|\gamma_1, \gamma_1\gamma_2\}), \end{aligned}$$

con lo cual, dependiendo si 0 está o no en alguno de los discos, se tiene la igualdad deseada. La prueba es análoga para los discos abiertos. □

Corolario 5.5. *Sean D_1, D_2 dos discos abiertos o dos discos cerrados. Entonces*

$$\begin{aligned} rad(D_1 + D_2) &= max\,\{rad(D_1), rad(D_2)\} \\ rad(D_1D_2) &= max\,\{rad(D_1)|D_2|, |D_1|rad(D_2)\} \end{aligned}$$

Con los resultados obtenidos en la proposición 5.4, y analizando los casos en que el cero está o no en los discos, se verifica fácilmente el siguiente resultado.

Lema 5.6. *Sean D_1, D_2 dos discos abiertos o cerrados. Entonces*

i) $|D_1D_2| = |D_1||D_2|$

ii) $|D_1 + D_2| \leq max\,\{|D_1|, |D_2|\}$

iii) Si $|D_1| \neq |D_2|$*, entonces* $|D_1 + D_2| = max\,\{|D_1, D_2|\}$

Lema 5.7. *Sea K un cuerpo valorado de equi-característica cero, y sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Entonces dados dos discos cerrados (o abiertos) D_1 y D_2, si $nD_1 = nD_2$, entonces $D_1 = D_2$, donde $nD = D + \cdots + D$, n veces.*

Demostración. Se mostrará el resultado para discos cerrados. Sea $D_1 = cd(b_1, \gamma_1)$, $D_2 = cd(b_2, \gamma_2)$. Supóngase entonces que $nD_1 = nD_2$. Así, por el corolario 5.5, se tiene que $rad(D_1) = rad(nD_1) = rad(nD_2) = rad(D_2)$, con lo cual $\gamma_1 = \gamma_2$. Basta ver entonces que $b_1 \in D_2$. Como K tiene característica residual cero, n puede verse como un elemento de K tal que $|n| = 1$. Como $nb_1 \in cd(nb_1, \gamma_1) = nD_1 = nD_2 = cd(nb_2, \gamma_2)$, entonces $|nb_1 - nb_2| \leq \gamma_2$, y por tanto

$$\begin{aligned} |b_1 - b_2| &= |n||b_1 - b_2| \\ &= |n(b_1 - b_2)| \\ &= |nb_1 - nb_2| \\ &\leq \gamma_2, \end{aligned}$$

con lo cual $b_1 \in cd(b_2, \gamma_2) = D_2$ y se tiene entonces que $D_1 = D_2$. □

Lema 5.8. *Sea K un cuerpo valorado de equi-característica cero, D un disco, y $n \in \mathbb{N}^*$. Entonces $|nD| = |D|$.*

Demostración. Por el corolario 5.5, $rad(D) = rad(nD)$, con lo cual si $0 \in D$ (y por tanto $0 \in nD$), el resultado se tiene inmediatamente. En caso contrario, $|D| = |b|$ para cualquier $b \in D$. Si D es cerrado, $rad(D) < |b|$, y si D es abierto, $rad(D) \leq |b|$. Como n puede verse como un elemento de K tal que $|n| = 1$, al tomar nb como elemento de nD, se tiene que $|nb| = |n||b| = |b|$. Como $0 \notin nD$, entonces $|nD| = |nb| = |b| = |D|$. □

Un n-cluster en $\mathcal{D}$ o en $\mathcal{O}$ será un conjunto de n discos $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{D}$ $(\in \mathcal{O})$ del mismo radio tales que para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ distintos, $|D_i - D_j| = \gamma$ para cierto $\gamma \in \Gamma_0$. En general, un cluster en $\mathcal{D}$ o en $\mathcal{O}$, será un conjunto finito S de $\mathcal{D}_\gamma$ $(\mathcal{O}_\gamma)$ para un cierto $\gamma \in \Gamma_0$ que es un cluster en el árbol valorado (viendo a $\mathcal{D}_\gamma$ y $\mathcal{O}_\gamma$ como conjuntos valorados) construido sobre él.

Definición 5.9. La valoración en Γ_0 para un cluster S en $\mathcal{D}$ o en $\mathcal{O}$ está dada por $|S| = max\{|D| : D \in S\}$. Nótese que para clusters S en $\mathcal{D}$ o en $\mathcal{O}$, $|S| \geq h_1(S)$, y a lo sumo un disco $D \in S$ puede ser tal que $|D| < |S|$. Si $|S| > h_1(S)$, entonces para cada $D \in S$ se tiene que $|D| = |S|$

Lema 5.10. *Sea K un cuerpo valorado de equi-característica cero, y S un $(N, n_q, \ldots, n_1)$-cluster en $\mathcal{D}$. Sean $S_1, \ldots S_n$ $(n \leq N)$ distintos $(n_q, \ldots, n_1)$-clusters de S. Si $m > 0$ y*

$$D_{11}, \ldots D_{1m} \in S_1; D_{21}, \ldots D_{2m} \in S_2; \ldots; D_{n1}, \ldots D_{nm} \in S_n,$$

entonces el conjunto $\{D_{11} + \cdots + D_{1m}, D_{21} + \cdots + D_{2m}, \ldots, D_{n1} + \cdots + D_{nm}\}$ es un n-cluster en $\mathcal{D}$.
Lo mismo es cierto en $\mathcal{O}$.

Demostración. Como las sumas de los discos tienen el mismo radio que los discos, todas las sumas tienen el mismo radio. Sea $\gamma = h_{q+1}(S)$. Entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, si b_{i1} es un elemento de D_{i1}, se tiene que los discos $D_{i1}, \ldots, D_{im}$ están contenidos $C_i = od(b_{i1}, \gamma)$, pues $|D_{ik} - D_{il}| < \gamma$ para cualesquiera $k, l \in \{1, \ldots, m\}$. Además nótese que para $i \neq j$, $C_i \neq C_j$ y $|C_i - C_j| = \gamma$.
Por el lema 5.7, se tiene que si $i \neq j$, entonces $mC_i \neq mC_j$; y de hecho son disjuntos al tener el mismo radio. Utilizando el lema 5.8 se verifica que

$$|mC_i - mC_j| = |m(C_i - C_j)| = |C_i - C_j| = \gamma.$$

Como para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ $D_{i_1} + \cdots + D_{im} \subseteq mC_i$ (pues $D_{ik} \subseteq C_i$ para cada $1 \leq k \leq m$), entonces se tiene que para $i \neq j$,

$$(D_{i1} + \cdots + D_{im}) \cap (D_{j1} + \cdots + D_{jm}) = \emptyset,$$

y además

$$|(D_{i1} + \cdots + D_{im}) - (D_{j1} + \cdots + D_{jm})| = |mC_i - mC_j| = \gamma,$$

lo cual verifica que

$$\{D_{11} + \cdots + D_{1m}, D_{21} + \cdots + D_{2m}, \ldots, D_{n1} + \cdots + D_{nm}\}$$

es un n-cluster en $\mathcal{D}$ (o en $\mathcal{O}$). $\square$

Se denotará por $\mathcal{C}$ al conjunto de discos de $\mathcal{D}$ con valoración ≤ 1 y radio < 1, es decir, al conjunto de discos cerrados de radio < 1 contenidos propiamente en el disco cerrado de radio 1 (el anillo de valoración). Como cada $D \in \mathcal{C}$ está contenido en una clase lateral del ideal maximal M dentro del anillo de valoración R, tiene sentido hablar de la *clase residual* de D; que será un elemento del cuerpo residual, y se denotará por $\mathfrak{r}(D)$.

Análogamente se denotará por $\mathcal{C}'$ al conjunto de discos de $\mathcal{O}$ con valoración ≤ 1 y radio ≤ 1, es decir, al conjunto de discos abiertos de radio ≤ 1 contenidos propiamente en el disco cerrado de radio 1. Y de igual forma, para cada $E \in \mathcal{C}'$ se denotará por $\mathfrak{r}(E)$ a la clase lateral del ideal maximal en el anillo de valoración que contiene a E.

Lema 5.11. *Sea k el cuerpo residual del cuerpo valorado K. Entonces $\mathcal{C}$ está cerrado bajo suma y producto de $\mathcal{D}$, y la función $\mathfrak{r} : \mathcal{C} \to k$ dada por $D \mapsto \mathfrak{r}(D)$ es un homomorfismo aditivo y multiplicativo.*
Lo mismo es cierto para $\mathcal{C}'$ y $\mathfrak{r} : \mathcal{C}' \to k$.

Demostración. Se mostrará el resultado para $\mathcal{C}$. Sean $D_1 = cd(b_1, \gamma_1)$, $D_2 = cd(b_2, \gamma_2)$ tales que $|b_1|, |b_2| \leq 1$ y $\gamma_1, \gamma_2 < 1$. Por el corolario 5.5, $rad(D_1 + D_2), rad(D_1 D_2) < 1$ y por el lema 5.6, $|D_1 + D_2|, |D_1 D_2| \leq 1$, con lo cual se verifica que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo suma y producto.
Nótese que $\mathfrak{r}(D_1) = \mathfrak{r}(b_1)$, $\mathfrak{r}(D_2) = \mathfrak{r}(b_2)$, $\mathfrak{r}(D_1 + D_2) = \mathfrak{r}(b_1 + b_2)$ y $\mathfrak{r}(D_1 D_2) = \mathfrak{r}(b_1 b_2)$, con lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}(D_1 + D_2) &= \mathfrak{r}(b_1 + b_2) = \mathfrak{r}(b_1) + \mathfrak{r}(b_2) = \mathfrak{r}(D_1) + \mathfrak{r}(D_2) \\ \mathfrak{r}(D_1 D_2) &= \mathfrak{r}(b_1 b_2) = \mathfrak{r}(b_1)\mathfrak{r}(b_2) = \mathfrak{r}(D_1)\mathfrak{r}(D_2), \end{aligned}$$

como se quería ver. □

Lema 5.12. *Sea $S = \{D_1, \ldots, D_n\} \subseteq \mathcal{D}_\gamma$ (resp. $\mathcal{O}_\gamma$) un n-cluster, donde $\gamma < 1$ (resp. $\gamma \leq 1$) y $h_1(S) = 1$. Si $D_i = cd(b_i, \gamma)$ (resp. $od(b_i, \gamma)$) para cada $1 \leq i \leq n$, entonces*

$$x \in D_1 \cup \cdots \cup D_n \Leftrightarrow |(x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_n)| \leq \gamma \text{ (resp. } < \gamma).$$

Demostración. Se mostrará para los discos cerrados. La prueba para los discos abiertos es análoga.
$\Leftarrow$) Sin pérdida de generalidad, asúmase que $x \in D_1$, con lo cual $|x - b_1| \leq \gamma$ y para cada $1 < i \leq n$, $|x - b_i| = 1$. Así,

$$|(x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_n)| = |x - b_1||x - b_2| \ldots |x - b_n| = |x - b_1| \leq \gamma$$

$\Rightarrow$) Supóngase que $x \notin D_1 \cup \ldots D_n$. Si $|x - b_i| \geq 1$ para todo i, entonces

$$|(x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_n)| \geq 1 > \gamma.$$

Así, asúmase, sin pérdida de generalidad que $|x - b_1| < 1$ y $|x - b_1| > \gamma$ (pues $x \notin D_1$). Entonces para cada $i \neq 1$ se tiene que

$$|x - b_i| = |(x - b_1) + (b_1 - b_i)| = max\,\{|x - b_1|, |b_1 - b_i|\} = |b_1 - b_i| = 1,$$

pues $|x - b_1| < 1$ y $|b_1 - b_i| = 1$, ya que $h_1(S) = 1$. Con esto se puede concluir que

$$|(x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_n)| = |x - b_1| > \gamma,$$

con lo cual queda verificada la contrarrecíproca. □

Lema 5.13. *Sea $n \geq 2$, y sean $S = \{D_1, \ldots, D_n\}$ y $T = \{E_1, \ldots, E_n\}$ n-clusters en $\mathcal{D}$ tales que $|S| = h_1(S) = \gamma$ y $|T| = h_1(T) = \delta$. Si*

$$\begin{aligned} D_1 D_2 \ldots D_n &= E_1 E_2 \ldots E_n \text{ , y} \\ \sum_{i=1}^{n} D_1 D_2 \ldots \hat{D}_i \ldots D_n &= \sum_{i=1}^{n} E_1 E_2 \ldots \hat{E}_i \ldots E_n, \end{aligned}$$

donde $\hat{}$ significa omitir dicho término, entonces $\gamma = \delta$.

Demostración. Supóngase, en búsqueda de una contradicción, que $\gamma > \delta$. Nótese que según la definición 5.9, a lo sumo un D_i puede ser tal que $|D_i| < \gamma$. Se analizarán entonces los dos casos.

Caso 1. $|D_i| = \gamma$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así,

$$|D_1 D_2 \ldots D_n| = \gamma^n > \delta^n \geq |E_1 E_2 \ldots E_n|$$

, contradiciendo el hecho de que $D_1 D_2 \ldots D_n = E_1 E_2 \ldots E_n$.

Caso 2. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $|D_1| < \gamma$, con lo cual, para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$, $|D_i| = \gamma$. De esta manera se tiene que

$$|D_2 D_3 \ldots D_n| = \gamma^{n-1} > |D_1 \cdots \hat{D}_i \cdots D_n|,$$

para $i \neq 1$, con lo cual

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n} D_1 \cdots \hat{D}_i \cdots D_n \right| &= \left| D_2 D_3 \cdots D_n + \sum_{i=2}^{n} D_1 \cdots \hat{D}_i \cdots D_n \right| \\ &= \gamma^{n-1} \\ &> \delta^{n-1} \\ &\geq \left| \sum_{i=1}^{n} E_1 \cdots \hat{E}_i \cdots E_n \right|, \end{aligned}$$

contradiciendo la segunda hipótesis. $\square$

6 1-Eliminación de imaginarios en $ACVF'_{0,0}$

En esta sección se utilizan los resultados previos para mostrar la 1-eliminación de imaginarios en la teoría multivalorada de los cuerpos algebraicamente cerrados valorados de equi-característica cero $ACVF'_{0,0}$ para los conjuntos definibles del cuerpo en una variable. El enfoque de la prueba de 1-eliminación de imaginarios que se presenta a lo largo de esta sección es original y simplifica significativamente el camino desarrollado en [7]. Las pruebas de los resultados adaptan elementos presentes en las pruebas allí presentadas.

Por el teorema de Holly (Teorema 3.4), cada conjunto definible A está asociado a dos conjuntos finitos de discos $S_1 = \{B_1, \ldots, B_n\}$ y $S_2 = \{D_1, \ldots, D_n\}$, donde los B_i's son los bloques (disjuntos dos a dos) y los D_i's son los huecos (también disjuntos) en la descomposición única en quesos suizos. Nótese que para cualquier $f \in Aut(\mathbb{C})$, se tiene que

$$f(A) = A \Leftrightarrow f(S_1) = S_1 \wedge f(S_2) = S_2,$$

pues la imagen bajo un automorfismo de un bloque será de nuevo un bloque y la de una hueco será un hueco. Es importante aclarar que se está haciendo un abuso de notación, pues $f(S_i) = S_i$ significa, en este contexto, permutar los discos de S_i, y no $f(\cup S_i) = \cup S_i$. De esta manera es suficiente entonces encontrar parámetros canónicos para conjuntos finitos de discos disjuntos. Las siguientes observaciones y lemas reducirán aún más el problema.

Observación 6.1. *Sea S un conjunto finito de discos. Sea $A = \{D \in S : D \text{ es abierto }\}$ y $B = \{D \in S : D \text{ es cerrado}\}$. Entonces para cada $f \in Aut(\mathbb{C})$ se tiene que*

$$f(S) = S \Leftrightarrow f(A) = A \wedge f(B) = B.$$

Demostración. Basta ver que la imagen bajo un automorfismo de un disco abierto es de nuevo un disco abierto e igualmente para los discos cerrados. $\dashv$

Por la anterior observación, el problema se reduce a encontrar parámetros canónicos para conjuntos finitos de discos cerrados (abiertos) disjuntos.

Observación 6.2. *Sea S un conjunto finito de discos cerrados (abiertos) disjuntos. Sean $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_n$ los radios de los discos de S, y sea S_i el subconjunto de S formado por los discos de radio γ_i. Entonces para cada $f \in Aut(\mathbb{C})$ se tiene que*

$$f(S) = S \Leftrightarrow f(S_1) = S_1 \wedge \cdots \wedge f(S_n) = S_n.$$

Demostración. Basta ver que para todo $f \in Aut(\mathbb{C})$ y cualesquiera $\gamma_1 \gamma_2 \in \Gamma_0$, si $\gamma_1 < \gamma_2$, entonces $f(\gamma_1) < f(\gamma_2)$. $\dashv$

Así, el problema se reduce entonces a encontrar parámetros canónicos para conjuntos finitos de discos cerrados (abiertos) disjuntos del mismo radio.

Lema 6.3. *Para tener 1-eliminación de imaginarios para conjuntos definibles del cuerpo en $ACVF'_{0,0}$, basta encontrar parámetros canónicos para clusters en $\mathcal{D}$ o en $\mathcal{O}$.*

Demostración. Sea S un conjunto de discos cerrados (abiertos) disjuntos del mismo radio δ. Considérese el árbol valorado T de S. Durante esta prueba se considerarán únicamente automorfismos que fijan S como conjunto, con lo cual dichos automorfismos dejarán fijo el árbol T.
Paso 1. Nótese que si $\{D_{i_1}, \ldots D_{i_n}\} \subseteq S$ es un n-cluster en T y f es un automorfismo que fija S, entonces $\{f(D_{i_1}), \ldots f(D_{i_n})\}$ es de nuevo un n-cluster en T; sólo hace

falta notar que las proporciones de las distancias entre los discos se conservan bajo automorfismos. Con esto se puede suponer entonces que

$$S = S_1^1 \dot\cup \dots \dot\cup S_{m_1}^1,$$

donde cada S_i^1 ($1 \leq i \leq m_1$) es un n_1-cluster disjunto de los demás, para ciertos $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$ fijos. Sea $\gamma_i^1 = h_1(S_i^1)$ y supóngase spdg que $\gamma_1^1 \leq \gamma_2^1 \cdots \leq \gamma_{m_1}^1$. Como los n_1-clusters con igual altura primera irán, bajo automorfismos, a n_1-clusters de igual altura primera, y los automorfismos preservan el orden de Γ_0, puede suponerse que S es la reunión de m_1 n_1-clusters con altura primera γ^1. Es decir, que S es la reunión de (k, r_1)-clusters para un número finito de k's.

Paso 2. Por observaciones análogas, puede verse que la imagen bajo automorfismos que fijan S de un (k, n_1)-cluster en T es de nuevo un (k, n_1)-cluster en T; con lo cual se puede asumir que

$$S = S_1^2 \dot\cup \dots \dot\cup S_{m_2}^2,$$

donde cada S_i^2 ($1 \leq i \leq m_2$) es un (n_2, n_1)-cluster distinto de los demás con altura primera γ^1, para ciertos $n_1, n_2, m_2 \in \mathbb{N}$ fijos. Sea entonces $\gamma_i^2 = h_2(S_i^2)$ y supóngase spdg que $\gamma_1^2 \leq \gamma_2^2 \cdots \leq \gamma_{m_2}^2$. Por razones análogas a las del paso anterior, se puede suponer que S es la reunión finita de m_2 (n_2, n_1)-clusters con altura primera γ^1 y altura segunda γ^2.

Como S es finito, nótese que el proceso esbozado terminará en un número finito de pasos reduciendo el problema hasta el caso en que S es un $(1, n_q, n_{q-1}, \dots, n_1)$-cluster en $\mathcal{D}$ para ciertos $n_q, \dots, n_1 \in \mathbb{N}$, es decir, un clan. □

El próximo lema es útil para la construcción de parámetros canónicos de conjuntos definibles y se enuncia en un contexto más general. Antes se mostrará un hecho sencillo que ha de tenerse claro y se introducirá alguna notación.

Observación 6.4. *Sea A un conjunto definible con parámetro canónico a. Si g es un automorfismo, entonces $g(a)$ es un parámetro canónico de $g(A)$.*

Demostración. Sea f un automorfismo. Nótese entonces que

$$f(g(A)) = g(A) \Leftrightarrow g^{-1}fg(A) = A \Leftrightarrow g^{-1}fg(a) = a \Leftrightarrow f(g(a)) = g(a). \dashv$$

Sea $A = A_1 \dot\cup \dots \dot\cup A_N$ la unión disjunta de N conjuntos y sea $\sim$ la relación de equivalencia en $\{A_1, \dots, A_N\}$ dada por:

$$A_i \sim A_j \text{ ssi existe un } f \in Aut(\mathbb{C}) \text{ tal que } f(A_i) = A_j$$

Sea $E_i = \left\{B_1^i, \dots, B_{r_i}^i\right\}$ la i-ésima de las n $\sim$-clases de equivalencia. Sea $B^i = \bigcup_{j=1}^{r_i} B_j^i$, de tal manera que $A = B_1 \dot\cup \dots \dot\cup B_n$. Y para cada i, j sea $f_j^i \in Aut(\mathbb{C})$ tal que $f_j^i(B_1^i) = B_j^i$.

Lema 6.5. *Con la notación recién introducida, si:*

1. *Para todo $f \in Aut(\mathbb{C})$, $f(A) = A$ implica que para todo $i \in \{1, \dots n\}$ y todo $j \in \{1, \dots, r_i\}$, existe un k tal que $f(B_j^i) = B_k^i$.*
2. *Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, a_1^i es un parámetro canónico de B_1^i.*
3. *Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, c_i es un parámetro canónico de $\left\{a_1^i, \dots, a_{r_i}^i\right\}$, donde $a_j^i = f_j^i(a_1^i)$.*

Entonces $c = c_1 \dots c_n$ es un parámetro canónico de A.

Demostración. Sea $f \in Aut(\mathbb{C})$ un automorfismo arbitrario. Se verá que

$$f(A) = A \Leftrightarrow f(c) = c$$

$\Leftarrow$). Supóngase que $f(c) = c$. Entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(c_i) = c_i$, y por tanto

$$f(\{a_1^i, \ldots, a_{r_i}^i\}) = \{a_1^i, \ldots, a_{r_i}^i\}$$

Observación. $f(a_j^i) = a_k^i \Leftrightarrow f(B_j^i) = B_k^i$

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned} f(a_j^i) = a_k^i & \Leftrightarrow & ff_j^i(a_1^i) = f_k^i(a_1^i) \\ & \Leftrightarrow & (f_k^i)^{-1} ff_j^i(a_1^i) = a_1^i \\ & \Leftrightarrow & (f_k^i)^{-1} ff_j^i(B_1^i) = B_1^i \\ & \Leftrightarrow & ff_j^i(B_1^i) = f_k^i(B_1^i) \\ & \Leftrightarrow & f(B_j^i) = B_k^i. \dashv \end{aligned}$$

Como para cada $j \in \{1, \ldots, r_i\}$ existe k tal que $f(a_j^i) = a_k^i$, por la observación se tiene que $f(B_j^i) = B_k^i$. Con esto se concluye que para cada $i \in \{1, \ldots n\}$, $f(B^i) = B^i$ y, por lo tanto, que $f(A) = A$

$\Rightarrow$). Nótese que si $f(A) = A$, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $j \in \{1, \ldots, r_i\}$, $f(B_j^i) = B_k^i$ para algún $k \in \{1, \ldots, r_i\}$; con lo cual $f(a_j^i) = a_k^i$ y entonces $f(c_i) = c_i$, i.e., $f(c) = c$. $\square$

En los lemas siguientes se mostrará que ciertos conjuntos finitos de discos y de finitas tuplas de discos tienen parámetros canónicos. En particular, se hará uso de la técnica para codificar conjuntos finitos en la teoría de cuerpos trabajando con las funciones simétricas. Estos resultados se utilizarán fuertemente en la prueba del teorema principal que se hará por inducción.

Lema 6.6. *Todo n-cluster en $\mathcal{D}$ o en $\mathcal{O}$ tiene una parámetro canónico.*

Demostración. Se mostrará sólo para los discos cerrados. La prueba es análoga para los discos abiertos. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y sea $S = \{D_1, \ldots, D_n\}$ un n-cluster en $\mathcal{D}$.
Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea

$$D_i' = (n-1)D_i - \sum_{i \neq j} D_j.$$

Se verá que la tupla dada por

$$C = (D_1 + D_2 + \ldots D_n, \xi_1(D_1', \ldots, D_n'), \ldots, \xi_n(D_1', \ldots, D_n')),$$

donde

$$\xi_l(D_1', \ldots, D_n') = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq n} D_{i_1}' D_{i_2}' \ldots D_{i_l}'$$

es la l-ésima función simétrica calculada en los D_i''s, es un parámetro canónico para S. Nótese que es suficiente verificar que se trata de una asignación inyectiva. En tal caso, todo automorfismo que fije dicha tupla, fijará S; y es claro que todo automorfismo que fije S como conjunto fijará la tupla en cuestión. Si $n = 1$, no hay nada que probar. Supóngase entonces que $n > 1$ y que $T = \{E_1, \ldots, E_n\}$ es un n-cluster en $\mathcal{D}$ tal que

$$\begin{aligned} & (D_1 + D_2 + \ldots D_n, \xi_1(D_1', \ldots, D_n'), \ldots, \xi_n(D_1', \ldots, D_n')) \\ = & (E_1 + E_2 + \ldots E_n, \xi_1(E_1', \ldots, E_n'), \ldots, \xi_n(E_1', \ldots, E_n')). \end{aligned}$$

Como todos los D_i's tienen el mismo radio, δ, entonces $rad(D_1+\cdots+D_n)=\delta$; con lo cual se concluye que $rad(E_i)=\delta$ para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$. De igual manera se observa que

$$rad(D'_1)=\ldots rad(D'_n)=rad(E'_1)\ldots rad(E'_n)=\delta.$$

Nótese que existe un $\gamma>\delta$ tal que $S'=\{D'_1,\ldots,D'_n\}$ es un n-cluster en $\mathcal{D}$ tal que $h_1(S')=|S'|=\gamma$. Para ver esto basta tomar $\gamma=h_1(S)$ y notar que

$$\begin{aligned}
|D'_i-D'_j| &= \left|((n-1)D_i-\sum_{k\neq i}D_k)-((n-1)D_j-\sum_{k\neq j}D_k)\right| \\
&= |nD_i-nD_j| \\
&= |n(D_i-D_j)| \\
&= |D_i-D_j| \\
&= \gamma
\end{aligned}$$

Más aún, $|D'_i|=|(D_i-D_1)+(D_i-D_2)+\cdots+(D_i-D_n)|\leq\gamma$ por el resultado anterior; con lo cual se tiene que $|S'|\leq\gamma$. Y de hecho, como $h_1(S')=\gamma$, por lo observado en la definición 5.9 se tiene que $|S'|=\gamma$.
Análogamente se tiene que $T'=\{E'_1,\ldots,E'_n\}$ es un n-cluster en $\mathcal{D}$ tal que $|T'|=h_1(T')$; y por hipótesis, utilizando el lema 5.13 se tiene que $|T'|=h_1(T')=\gamma$.
También es cierto que $\xi_1(D'_1,\ldots,D'_n)=\xi_1(E'_1,\ldots,E'_n)$, pues

$$\begin{aligned}
\xi_1(D'_1,\ldots,D'_n) &= D'_1+\cdots+D'_n \\
&= (n-1)D_1 - D_2 - D_3 - \ldots - D_n \\
&\quad - D_1+(n-1)D_2 - D_3-\ldots - D_n \\
&\quad \vdots \\
&\quad - D_1 + D_2 - D_3 - \cdots + (n-1)D_n \\
&= cd(0,\delta) \\
&= \xi_1(E'_1,\ldots,E'_n)
\end{aligned}$$

Ahora bien, sea $e\in K$ tal que $|e|=1/\gamma$, y para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$, sean

$$B_i=eD'_i \text{ y } C_i=eE'_i.$$

Sea $\alpha=\delta/\gamma$. Nótese que
1. Para cada i, $|B_i|=|C_i|=\delta/\gamma=\alpha<1$.
2. Para $i\neq j$, $|B_i-B_j|=|eD'_i-eD'_j|=|e(D'_i-D'_j)|=1/\gamma|D'_i-D'_j|=1$.
Así, $\{B_1,\ldots,B_n\}$ es un n-cluster en $\mathcal{D}_\alpha$ con $h_1(\{B_1,\ldots,B_n\})=1$. Además, por la definición 5.9, se tiene que $|\{B_1,\ldots,B_n\}|=1$, y a lo sumo para un $i\in\{1,\ldots,n\}$, $|B_i|<1$. Análogamente $\{C_1,\ldots,C_n\}$ es un n-cluster en $\mathcal{D}_\alpha$ tal que $|\{C_1,\ldots,C_n\}|=h_1(\{C_1,\ldots,C_n\})=1$ y tal que a lo sumo un C_i cumple $|C_i|<1$.
Más aún, es fácil ver que para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$

$$\begin{aligned}
\xi_i(B_1,\ldots,B_n) &= \xi_i(eD'_1,\ldots,eD'_n) \\
&= \xi_i(eE'_1,\ldots,eE'_n) \\
&= \xi_i(C_1,\ldots,C_n).
\end{aligned}$$

Supóngase ahora que para cada i, $B_i=cd(b_i,\alpha)$ y $C_i=cd(c_i,\alpha)$. Nótese que el producto de finitos y distintos B_i's tiene radio α (proposición 5.5). E igualmente para los productos de finitos y distintos C_i's. Como las funciones simétricas calculadas

en los B_i's y los C_i's son sólo sumas y productos de éstos, se tiene que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $rad(\xi_i(B_1, \ldots, B_n)) = rad(\xi_i(C_1, \ldots, C_n)) = \alpha$.
Nótese además que para cada i,

$$\xi_i(b_1, \ldots, b_n) \in \xi_i(B_1, \ldots, B_n) = \xi_i(C_1, \ldots, C_n) \ni \xi_i(c_1, \ldots, c_n),$$

con lo cual se tiene que $|\xi_i(b_1, \ldots, b_n) - \xi_i(c_1, \ldots, c_n)| \leq \gamma$ para cada i.
Con el objetivo final de mostrar que $\{D_1, \ldots, D_n\} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ y tener que la asignación es en efecto inyectiva, se mostrará primero que $\{B_1, \ldots, B_n\} = \{C_1, \ldots, C_n\}$. Esto se hará verificando que $\{-B_1, \ldots, -B_n\} = \{-C_1, \ldots, -C_n\}$, que también son n-clusters en $\mathcal{D}_\alpha$ tales que $|\cdot| = h_1(\cdot) = 1$. Como cada uno de estos n-clusters consiste de n discos disjuntos del mismo radio, basta verificar que

$$-B_1 \cup \cdots \cup -B_n = -C_1 \cup \cdots \cup -C_n.$$

Supóngase entonces que $r \in -B_1 \cup \cdots \cup -B_n$. Nótese que $|r| \leq 1$, y por el lema 5.12,

$$|(r + b_1)(r + b_2) \cdots (r + b_n)| \leq \alpha,$$

con lo cual

$$|r^n + \xi_1(b_1, \ldots, b_n) r^{n-1} + \cdots + \xi_n(b_1, \ldots, b_n)| \leq \alpha.$$

Como para cada i, $|\xi_i(b_1, \ldots, b_n) - \xi_i(c_1, \ldots, c_n)| \leq \gamma$ y $|r| \leq 1$, nótese que

$$|\xi_i(b_1, \ldots, b_n) r^{n-i} - \xi_i(c_1, \ldots, c_n) r^{n-i}| \leq \gamma,$$

con lo cual, por la desigualdad triangular se concluye que

$$|r^n + \xi_1(c_1, \ldots, c_n) r^{n-1} + \cdots + \xi_n(c_1, \ldots, c_n)| \leq \alpha,$$

es decir, que $|(r + c_1)(r + c_2) \cdots (r + c_n)| \leq \alpha$, lo cual, por el lema 5.12 implica que $r \in -C_1 \cup \cdots \cup -C_n$. Análogamente se muestra que $-C_1 \cup \cdots \cup -C_n \subseteq -B_1 \cup \cdots \cup -B_n$. De esta manera se tiene que

$$\begin{aligned} \{B_1, \ldots, B_n\} &= \{C_1, \ldots, C_n\} \\ \Rightarrow \{eD'_1, \ldots, eD'_n\} &= \{eE'_1, \ldots, eE'_n\} \\ \Rightarrow \{D'_1, \ldots, D'_n\} &= \{E'_1, \ldots, E'_n\} \\ \Rightarrow \{D'_1 + A, \ldots, D'_n + A\} &= \{E'_1 + A, \ldots, E'_n + A\}, \end{aligned}$$

donde $A = D_1 + \cdots + D_n = E_1 + \cdots + E_n$.
Nótese que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $D'_i + A = (n-1)D_i - \sum_{j \neq i} D_j + \sum_j D_j = nD_i$ y $E'_i + A = nE_i$, lo cual implica que

$$\{nD_1, \ldots, nD_n\} = \{nE_1, \ldots, nE_n\}.$$

Así, asumiendo sin pérdida de generalidad que $nD_i = nE_i$ para cada i, por el lema 5.7 se tiene que

$$\{D_1, \ldots, D_n\} = \{E_1, \ldots, E_n\},$$

como se quería ver. $\square$

Lema 6.7. *Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y sea*

$$S = \{(D_1, E_1), \ldots (D_n, E_n)\}$$

un conjunto de n 2-tuplas de discos cerrados (abiertos) tal que $\{D_1, \ldots, D_n\}$ y $\{E_1 \ldots, E_n\}$ son n-clusters en $\mathcal{D}$ (en $\mathcal{O}$). Entonces S tiene un parámetro canónico.

Demostración. Se mostrará sólo para los discos cerrados. La prueba es análoga para los discos abiertos.
Se verá que la tupla dada por

$$\begin{aligned} C_S \;=\; & (D_1 + \cdots + D_n, \xi_2(D'_1, \ldots, D'_n), \ldots, \xi_n(D'_1, \ldots, D'_n), \\ & E_1 + \cdots + E_n, \xi_2(E'_1, \ldots, E'_n), \ldots, \xi_n(E'_1, \ldots, D'_n), \\ & f_{1,1}(D'_1, \ldots, D'_n, E'_1, \ldots, E'_n), f_{1,2}(D'_1, \ldots, D'_n, E'_1, \ldots, E'_n), \ldots, f_{1,n-1}(\cdot), \\ & f_{2,1}(D'_1, \ldots, D'_n, E'_1, \ldots, E'_n), f_{2,2}(D'_1, \ldots, D'_n, E'_1, \ldots, E'_n), \ldots, f_{2,n-2}(\cdot), \\ & \vdots \\ & f_{n-1,1}(D'_1, \ldots, D'_n, E'_1, \ldots, E'_n)) \end{aligned}$$

donde los D'_i's y los E'_i's son como en el lema anterior y para cada $l, m \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $l + m \leq n$,

$$f_{l,m}(D'_1, \ldots, D'_n, E'_1, \ldots, E'_n) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n \\ \{i_1, \ldots, i_l\} \cap \{j_1, \ldots, j_m\} = \emptyset}} D'_{i_1} \cdots D'_{i_l} E'_{j_1} \cdots E'_{j_m}$$

es un parámetro canónico para S. Nótese que es suficiente verificar que se trata de una asignación inyectiva. En tal caso, todo automorfismo que fije dicha tupla, fijará S; y es claro que todo automorfismo que fije S como conjunto fijará la tupla en cuestión. Sea entonces T otro conjunto de n pares de discos tales que las primeras y las segundas componentes formen n-clusters en $\mathcal{D}$ y tal que $C_S = C_T$. Se verá que $S = T$. Por el lema anterior, las primeras coordenadas de los pares de T formarán el mismo n-cluster que $\{D_1, \ldots, D_n\}$; y de igual manera las segundas formarán el mismo n-cluster que $\{E_1, \ldots, E_n\}$, con lo cual se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que $T = \big\{(D_1, E_{\sigma(1)}), \ldots, (D_n, E_{\sigma(n)})\big\}$, donde $\sigma \in S_n$ es una permutación de $\{1, \ldots, n\}$. Se mostrará que $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $E_{\sigma(k)} = E_k$.
Considérense $S_1 = \{D'_1, \ldots, D'_n\}$ y $S_2 = \{E'_1, \ldots, E'_n\}$, que como en el lema anterior son n-clusters en $\mathcal{D}$ tales que $|S_1| = h_1(S_1) = \gamma$ y $|S_2| = h_1(S_2) = \delta$, para ciertos $\gamma, \delta \in \Gamma_0$. Para ver que $\forall k E_{\sigma(k)} = E_k$, basta ver que $E'_{\sigma(k)} = E'_k$. Pues bien, sean $d, e \in K$ tales que $|d| = 1/\gamma$ y $|e| = 1/\delta$, y para cada i, sean

$$B_i = dD_i \text{ y } C_i = eE'_i.$$

Como en el lema anterior, $\{B_1, \ldots, B_n\}$ y $\{C_1, \ldots, C_n\}$ son n-clusters en $\mathcal{D}$ tales que $|\cdot| = h_1(\cdot) = 1$. Adicionalmente, como $C_S = C_T$, se tiene que para cualesquiera $l, m \in \{1, \ldots n\}$ tales que $l + m \leq n$,

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n \\ \{i_1, \ldots, i_l\} \cap \{j_1, \ldots, j_m\} = \emptyset}} D'_{i_1} \cdots D'_{i_l} E'_{j_1} \cdots E'_{j_m} = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n \\ \{i_1, \ldots, i_l\} \cap \{j_1, \ldots, j_m\} = \emptyset}} D'_{i_1} \cdots D'_{i_l} E'_{\sigma(j_1)} \cdots E'_{\sigma(j_m)},$$

y es fácil verificar que las mismas igualdades se cumplen si se reemplazan los D'_i's por los correspondientes B_i's y los E'_i's por los correspondientes C_i's; lo cual significa que tomando variables X, Y, Z, se satisface que

$$\begin{aligned} & (X + B_1 Y + C_1 Z)(X + B_2 Y + C_2 Z) \cdots (X + B_n Y + C_n Z) \\ = \; & (X + B_1 Y + C_{\sigma(1)} Z)(X + B_2 Y + C_{\sigma(2)} Z) \cdots (X + B_n Y + C_{\sigma(n)} Z) \end{aligned}$$

en el sentido de que los coeficientes, al expandir la expresión, son iguales. Claramente los B_i's y los C_i's están en la clase $\mathcal{C}$ definida en la sección anterior, con lo cual se puede tomar la proyección al cuerpo residual (de característica cero) de la expresión anterior pues ésta se comporta como un homomorfismo aditivo y multiplicativo en $\mathcal{C}$ (lema 5.11). Así, si $\mathfrak{r}(B_i) = r_i$ y $\mathfrak{r}(C_i) = s_i$, se tiene que

$$(X + r_1Y + s_1Z)\cdots(X + r_nY + s_nZ) = (X + r_1Y + s_{\sigma(1)}Z)\cdots(X + r_nY + s_{\sigma(n)}Z)$$

Nótese que para $i \neq j$, $|B_i - B_j| = 1$, con lo cual $r_i \neq r_j$. Y como $(k)[X, Y, Z]$ es dominio de factorización única, se concluye entonces que para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, $s_{\sigma(k)} = s_k$. Adicionalmente, nótese que como $h_1(\{C_1, \ldots, \mathbb{C}_n\}) = 1$, los elementos $s_1 = \mathfrak{r}(C_1), \ldots, s_n = \mathfrak{r}(C_n)$ son distintos, con lo cual se tiene que $\forall k, C_{\sigma(k)} = C_k$.
Finalmente, como los discos $C_1 = eE'_1, \ldots, C_n = eE'_n$ son distintos, se tiene que para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, $E'_{\sigma(k)} = E_k$, como se quería ver. □

Lema 6.8. *Sean $k, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geq 1$ y sea*

$$S = \{(D_{11}, D_{12}, \ldots D_{1k}), \ldots (D_{n1}, D_{n2}, \ldots D_{nk})\}$$

un conjunto de n k-tuplas de discos cerrados (abiertos) tal que para cada $j \in \{2, \ldots, k\}$ el conjunto de tuplas $\{(D_{11}, D_{1j}), \ldots (D_{n1}, D_{nj})\}$ tiene parámetro canónico, entonces S tiene un parámetro canónico.

Demostración. Supóngase que para cada $j \in \{2, \ldots, k\}$, c_j es un parámetro canónico para el conjunto $S_j = \{(D_{11}, D_{1j}), \ldots (D_{n1}, D_{nj})\}$. La tupla $\bar{c} = c_2c_3 \ldots c_n$ es un parámetro canónico para S. Es fácil verificar que para cada $f \in Aut(\mathbb{C})$, $f(S) = S$ si y sólo si para cada $j \in \{2, \ldots, k\}$ se tiene que $f(S_j) = S_j$. Y esto pasa si y sólo si para cada j se tiene que $f(c_j) = c_j$; lo cual equivale a que $f(\bar{c}) = \bar{c}$. □

Corolario 6.9. *Sean $k, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geq 1$ y sea*

$$S = \{(D_{11}, D_{12}, \ldots D_{1k}), \ldots (D_{n1}, D_{n2}, \ldots D_{nk})\}$$

un conjunto de n k-tuplas d discos cerrados (abiertos) tal que para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\{D_{1i}, \ldots, D_{ni}\}$ es un n-cluster en $\mathcal{D}$ (en $\mathcal{O}$). Entonces S tiene un parámetro canónico.

Demostración. Tanto para discos abiertos como para discos cerrados la prueba es inmediata a partir de los dos lemas anteriores

Lema 6.10. *Sean $k, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geq 1$ y sea*

$$S = \{(B_1, D_{12}, \ldots D_{1k}), \ldots (B_n, D_{n2}, \ldots D_{nk})\}$$

un conjunto de n k-tuplas de discos cerrados (abiertos) tal que $\{B_1, \ldots, B_n\}$ es un n-cluster en $\mathcal{D}$ (en $\mathcal{O}$). Entonces S tiene un parámetro canónico.

Demostración. Se probará el hecho para discos cerrados. El argumento para los discos abiertos es análogo. La prueba se hará por inducción en n, y la hipótesis de inducción explícita es:
HI. Para cada $j < n$ y todo $k \in \mathbb{N}^+$, todo conjunto de la forma

$$\{(B_1, D_{12}, \ldots D_{1k}), \ldots (B_j, D_{j2}, \ldots D_{jk})\},$$

donde $\{B_1, \ldots, B_j\}$ es un j-cluster en $\mathcal{D}$, tiene un parámetro canónico.

Nótese que por el lema 6.8, es suficiente encontrar parámetros canónicos para conjuntos de pares de discos

$$S = \{(B_1, D_1), \ldots, (B_n, D_n)\},$$

donde $\{B_1, \ldots, B_n\}$ es un n-cluster en $\mathcal{D}$.

Dado un par $(B, D) \in S$, se dice que (B, D) tiene *orden* m en S si el D aparece m veces como segunda coordenada en algún par de S. Nótese que bajo automorfismos que fijen S, la imagen de un par de orden m tendrá de nuevo orden m, con lo cual es suficiente encontrar parámetros canónicos para los subconjuntos de pares de S con el mismo orden. Y en caso de que aparezca un par con orden mayor que 1, la hipótesis de inducción aplica y se obtiene el resultado. Así, puede entonces suponerse que los D_i's son todos distintos.

Más aún, utilizando los mismos argumentos que aparecen en la prueba del lema 6.3, puede reducirse el problema a encontrar parámetros canónicos para conjuntos de pares de discos de la forma $S = \{(B_1, D_1), \ldots, (B_n, D_n)\}$, donde $\{B_1, \ldots, B_n\}$ es un n-cluster en $\mathcal{D}$ y $\{D_1, \ldots, D_n\}$ es un $(1, N, n_q, n_{q-1}, \ldots, n_1)$-cluster en $\mathcal{D}$, para ciertos $N, n_q, \ldots, n_1 \in \mathbb{N}$ mayores que 1. Ahora bien, nótese que S puede expresarse de la forma $S = S_1 \dot\cup \ldots \dot\cup S_N$, donde

$$S_i = \{(B_{i1}, D_{i1}), \ldots, (B_{il}, D_{il})\} \qquad (i \in \{1, \ldots, N\}),$$

$l = n_q \cdot n_{q-1} \cdots n_1$, y para cada i, $\{D_{i1}, \ldots, D_{il}\}$ es uno de los N $(n_q, \ldots, n_1)$-clusters del árbol asociado a $\{D_1, \ldots, D_n\}$. Por hipótesis de inducción, como $l < n$, existen parámetros canónicos $\bar{C}_i = (C_{i1}, \ldots, C_{im}) \subseteq \mathcal{D}^m$ para cada S_i. * Más aún, puede asumirse que para cada i, $C_{i1} = D_{i1} + \cdots + D_{il}$. † Pues bien, por el lema 5.10, $\{C_{11}, C_{21}, \ldots, C_{N1}\}$ es un N-cluster en $\mathcal{D}$, con lo cual, como $N < n$, la hipótesis de inducción asegura la existencia de un parámetro canónico para el conjunto $\{\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_N\} = \{(C_{i1}, \ldots, C_{im}), \ldots, (C_{N1}, \ldots, C_{Nm})\}$ de parámetros canónicos de los S_i's. Finalmente, aplicando el lema 6.5 ‡, se concluye que existen parámetros canónicos para S, como se quería ver. □

Teorema Principal 6.11. *Sea S un $(n_q, \ldots, n_1)$-cluster en $\mathcal{D}$ con $n_q, \ldots, n_1 > 1$. Entonces S tiene un parámetro canónico.*

Demostración. La prueba se hará por inducción en q. Para el caso en que $q = 1$, el lema 6.6 asegura la existencia de un parámetro canónico para S. Supóngase entonces que $q > 1$. Nótese que S puede expresarse de la forma $S = S_1 \dot\cup \ldots \dot\cup S_{n_q}$, donde

$$S_i = \{D_{i1}, \ldots, D_{il}\} \qquad (i \in \{1, \ldots, N\}),$$

$l = n_{q-1} \cdot n_{q-2} \cdots n_1$, y para cada i, $\{D_{i1}, \ldots, D_{il}\}$ es uno de los n_q $(n_{q-1}, \ldots, n_1)$-clusters del árbol asociado a S. Por hipótesis de inducción, existen parámetros canónicos $\bar{C}_i = (C_{i1}, \ldots, C_{im}) \subseteq \mathcal{D}^m$ para cada S_i. Más aún, puede asumirse que para cada i, $C_{i1} = D_{i1} + \cdots + D_{il}$ (tomando en cuenta las observaciones que se hicieron en la prueba del lema anerior). De esta forma, por el lema 5.10, $\{C_{11}, C_{21}, \ldots, C_{N1}\}$ es un N-cluster en $\mathcal{D}$, con lo cual el lema anterior asegura la existencia de un parámetro canónico para el conjunto $\{\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_N\} = \{(C_{i1}, \ldots, C_{im}), \ldots, (C_{N1}, \ldots, C_{Nm})\}$ de parámetros canónicos de los S_i's. Finalmente, aplicando el lema 6.5, se concluye que existen parámetros canónicos para S, como se quería ver. □

*Nótese que los parámetros canónicos construidos en los lemas 6.6, 6.7 y 6.9 son precisamente tuplas de discos cerrados (abiertos).

†Basta añadir una primera componente (la suma deseada) a una tupla que funcione como parámetro canónico para S_i y verificar fácilmente que ésta nueva tupla es también un parámetro canónico.

‡Para ver que las hipótesis del lema se satisfacen, basta notar que la imagen bajo automorfismos que fijan S de cada S_i es de nuevo un S_j, y esto es debido a que la imagen de las segundas coordenadas de cada S_i (que forman un $(n_q, \ldots, n_1)$-cluster sobre el árbol T asociado a $\{D_1, \ldots, D_n\}$) es de nuevo un $(n_q, \ldots, n_1)$-cluster sobre T.

Referencias

[1] Bruno Poizat, *Une Théorie de Galois Imaginaire,* ***The Journal of Symbolic Logic***, vol. 48, no. 4 (1983), pp. 1151-1170.

[2] Bruno Poizat, *Cours de Théorie des Modèles,* Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, Villeurbane, (1985).

[3] E. Casanovas, R. Farre, *Weak forms of elimination of imaginaries,* ***Mathematical Logic Quarterly*** , 50 (2004) , pp. 126-140.

[4] D. HAskell, E. Hrushovski, D. Macpherson, *Definable sets in algebraically closed valued fields. Part I: elimination of imaginaries,* ***???***, ???.

[5] Jan E. Holly, *Definable equivalence relations and disc spaces of algebraically closed valued fields,* ***Ph.D. Thesis***, Universidad de Illinois (1992).

[6] Jan E. Holly, *Canonical forms for definable sets of algebraically closed and real closed valued fields,* ***The Journal of Symbolic Logic***, vol. 60 (1995), pp. 843-860.

[7] Jan E. Holly, *Prototypes for Definable Subsets of Algebraically Closed Valued Fields,* ***The Journal of Symbolic Logic***, vol. 62 (1997), pp. 1093-1141.

[8] M. Makkai, *A survey of basic stability theory with particular emphasis on orthogonality and regular types,* ***Israel Journal of Mathematics***, 49 (1984), pp. 181-238.

[9] S. Shelah, *Classification Theory*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam (1978).