Invariancia, hiperimaginarios y grupos de Galois*

Enrique Casanovas
Universidad de Barcelona

12 de enero de 2001

1. E_L, E_{KP} y E_{Sh}

Vamos a trabajar en el contexto de una teoría completa T con modelos infinitos. Su lenguaje será L y su modelo monstruo será $\mathfrak{C}$. Una tupla es una secuencia finita. Usamos $a, b, \ldots$ para secuencias arbitrarias y $x, y, \ldots$ para secuencias de variables. Si el contexto lo aclara, $a, b, \ldots$ pueden ser elementos y $x, y, \ldots$ pueden ser variables particulares. Una I-secuencia es una secuencia con índices en I, es decir, de la forma $a = (a_i : i \in I)$. La longitud de la secuencia es la cardinalidad de I si I es un conjunto arbitrario. Si es un ordinal α, su longitud es α. Decimos que la secuencia es infinita si el conjunto $\{a_i : i \in I\}$ es infinito. Una tupla es una secuencia de longitud finita.

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ es el grupo de los A-automorfismos de $\mathfrak{C}$, es decir, de los automorfismos de $\mathfrak{C}$ que son la identidad en el conjunto A. Se dice que dos conjuntos o dos secuencias son A-conjugados si hay un automorfismo en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ que transforma uno en otro.

El siguiente resultado sobre indiscernibles se debe fundamentalmente a M. Morley. Lo usaremos de vez en cuando.

Proposición 1.1 *Sea $\kappa \geq |T|$ un cardinal y pongamos $\lambda = \beth_{(2^\kappa)^+}$. Sea A un conjunto de cardinalidad a lo sumo κ y sea $(a_i : i < \lambda)$ una secuencia de secuencias a_i de longitud $\mu \leq \kappa$. Hay entonces una secuencia $(b_i : i < \omega)$ que es indiscernible sobre A y tal que para cada $n < \omega$ existen $i_0 < \ldots < i_n < \lambda$ tales que* $\mathrm{tp}(b_0, \ldots, b_n/A) = \mathrm{tp}(a_{i_0}, \ldots, a_{i_n}/A)$.

Una aplicación de esta proposición permite demostrar con facilidad que si I es una secuencia A-indiscernible y $B \supseteq A$ es un conjunto, entonces existe otra secuencia I' que es isomorfa a I sobre A y que es B-indiscernible. Por tanto existe también un conjunto B' que es A-conjugado de B y para el que I es B'-indiscernible.

Definición 1.1 Una relación R es *A-invariante* si es invariante bajo A-automorfismos, es

*Estas notas se originaron en una conferencia dada en la Universidad Nacional de Colombia en agosto de 2000 que fue organizada por Andrés Villaveces. Algunos de los resultados expuestos aparecerán próximamente en un artículo escrito conjuntamente por Enrique Casanovas, Daniel Lascar, Anand Pillay y Martin Ziegler. Los temas se desarrollaron en detalle en un Seminario realizado en la Universidad de Barcelona desde septiembre hasta diciembre de 2000. A ese Seminario asistieron Steffen Lewitzka y Rafel Farré y a ellos se deben numerosas observaciones que han mejorado la exposición. Está previsto continuar el seminario con Rafel Farré y ampliar estas notas.

decir, si para cada $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ y cada secuencia a

$$a \in R \Leftrightarrow f(a) \in R.$$

Claramente, basta con exigir la dirección de izquierda a derecha, esto es, $f(R) \subseteq R$. Si $A = \emptyset$ hablamos de relaciones invariantes. Obsérvese que R es A-invariante en T si y sólo si es invariante en $T(A)$.

Lema 1.2 *R es invariante si y sólo si hay una familia de tipos parciales $\{\pi_i(x) : i \in I\}$ tal que*

$$R(a) \ \Leftrightarrow \models \bigvee_{i \in I} \pi_i(a)$$

Prueba. Ponemos $\{\pi_i(x) : i \in I\} = \{\mathrm{tp}(a) : R(a)\}$.

Definición 1.2 Una relación R es *tipo-definible sobre A* si existe un tipo parcial $\pi(x)$ sobre A tal que para cada a,

$$R(a) \ \Leftrightarrow \models \pi(a)$$

es decir, $R = \pi(\mathfrak{C})$. Si π consta de una sola fórmula se dice que R es *definible sobre A*. Obviamente definible sobre A implica tipo-definible sobre A y esto último implica A-invariante.

Definición 1.3 Sea R una relación binaria entre I-secuencias. Se dice que es *finita* si para algún número natural n no hay ninguna secuencia $(a_i : i < n)$ tal que $\neg R(a_i, a_j)$ siempre que $i < j < n$. Se dice que es *acotada* si para algún número cardinal κ no hay ninguna secuencia $(a_i : i < \kappa)$ tal que $\neg R(a_i, a_j)$ siempre que $i < j < \kappa$. Si se trata de una relación de equivalencia, es finita si no hay más que un número finito de clases y es acotada si el número de clases es acotado, es decir, es un número cardinal. Obsérvese que si R es definible y acotada entonces, por compacidad, R tiene que ser finita.

Lema 1.3 *Cualquier intersección acotada de relaciones acotadas es una relación acotada.*

Prueba. Sea $|I| = \lambda$ y sea $(R_i : i \in I)$ una familia de relaciones acotadas. Para cada $i \in I$ sea κ_i una cota al tamaño de una familia de secuencias no relacionadas mediante R_i y sea $\kappa = \sup\{\kappa_i : i \in I\}$. Supongamos que en $R = \bigcap_{i \in I} R_i$ tenemos una familia de cardinal $(2^\kappa)^+$ formada por secuencias no relacionadas en R. A cada par de secuencias no relacionadas le asignamos un índice $i \in I$ con la propiedad de que no están R_i-relacionados. Por Erdös-Rado hay una subfamilia de cardinalidad κ^+ con la propiedad de que ningunos de ellos están R_i-relacionados para un $i \in I$ fijo. Esto contradice a la elección de κ.

Lema 1.4 *Sea E una relación de equivalencia invariante entre I-secuencias. Si el número de clases de E es mayor que $2^{2^{|I|+|T|}}$ entonces E no es acotada.*

Prueba. Sea $\kappa = 2^{|I|+|T|}$ y supongamos que E tiene al menos $(2^\kappa)^+$ clases. Como hay a lo sumo κ tipos $\mathrm{tp}(a, b)$ de I-secuencias a y b, por Erdös-Rado sabemos que hay un conjunto infinito de representantes de clases $(a_i : i < \omega)$ tal que $\mathrm{tp}(a_i, a_j) = \mathrm{tp}(a_l, a_k)$ siempre que $i < j$ y $l < k$. Por compacidad vemos que para cualquier cardinal λ hay una secuencia $(b_i : i < \lambda)$ tal que $\mathrm{tp}(b_i, b_j) = \mathrm{tp}(a_l, a_k)$ siempre que $i < j < \lambda$ y $l < k < \omega$. Por invariancia de E resulta entonces que $\neg E(b_i, b_j)$ si $i < j$, con lo cual E tiene al menos λ clases.

Definición 1.4 Definimos a continuación tres relaciones de equivalencia entre I-secuencias. Omitimos la referencia a I en la notación, de manera que el contexto debe aclararlo en cada caso.

1. $E_L(a,b)$ si y sólo si $E(a,b)$ para cada relación de equivalencia invariante y acotada E.
2. $E_{KP}(a,b)$ si y sólo si $E(a,b)$ para cada relación de equivalencia tipo-definible sobre $\emptyset$ y acotada E.
3. $E_{Sh}(a,b)$ si y sólo si $E(a,b)$ para cada relación de equivalencia definible sobre $\emptyset$ y finita E.

Proposición 1.5 *1. $E_L \subseteq E_{KP} \subseteq E_{Sh}$.*

2. E_L es invariante y acotada y refina a cualquier otra relación de equivalencia invariante y acotada.

3. E_{KP} es tipo-definible sobre $\emptyset$ y acotada y refina a cualquier otra relación de equivalencia tipo-definible sobre $\emptyset$ y acotada.

4. E_{Sh} es tipo-definible sobre $\emptyset$ y acotada y refina a todas las relaciones de equivalencia finitas definibles sobre $\emptyset$.

Prueba. Lo único que merece atención es el hecho de que E_L es acotada. La consideramos como relación binaria entre I-secuencias. Sea $\kappa = 2^{2^{|I|+|T|}}$ y sea M un modelo κ^+-saturado. Usando el Lema 1.4 vemos que toda relación de equivalencia acotada e invariante tiene un representante de cada una de sus clases en M. Por un lado debe tener λ clases si $\lambda \leq \kappa$ es el número de clases que hay y por otro lado la κ^+-saturación exige que no quede ninguna clase fuera. De ello se sigue que si $\mathrm{tp}(a/M) = \mathrm{tp}(b/M)$, entonces $E_L(a,b)$. Como el número de tipos de I-secuencias sobre M está acotado, también lo está el número de E_L-clases de I-secuencias.

2. Fórmulas gruesas

Definición 2.1 Una fórmula es *finita* si define una relación finita en el sentido antes explicado. Una fórmula *gruesa* es una fórmula finita, reflexiva y simétrica. Es, por tanto, una fórmula $\theta(x,y)$ donde x, y son secuencias de variables de la misma longitud, que define una relación reflexiva y simétrica con la propiedad de que no ha ninguna secuencia $(a_i : i < \omega)$ tal que $\neg\theta(a_i, a_j)$ siempre que $i < j < \omega$.

Definición 2.2 Sean $\varphi(x,y)$ y $\psi(x,y)$ dos fórmulas en los que x e y son secuencias de variables de la misma longitud. Su *producto* es la fórmula

$$(\varphi \circ \psi)(x,y) = \exists z(\varphi(x,z) \wedge \psi(z,y)).$$

Sean $\pi_1(x,y)$ y $\pi_2(x,y)$ dos tipos parciales en los que de nuevo x e y son secuencias de variables de la misma longitud. Su *producto* es el tipo

$$(\pi_1 \circ \pi_2)(x,y) = \{\varphi_1(x,y) \circ \varphi_2(x,y) : \varphi_1 \in \pi_1, \varphi_2 \in \pi_2\}.$$

Claro está, si π_1 define la relación R_1 y π_2 la relación R_2, entonces su producto define la relación compuesta $R_1 \circ R_2$. Iterando el producto podemos hablar de potencias $\pi^n(x,y)$ de tipos $\pi(x,y)$. Obsérvese que $\pi^n(x,y)$ es axiomatizable mediante $\{\varphi^n(x,y) : \varphi \in \pi\}$.

Observaciones 2.1 *1. Si $\theta_1(x,y)$ es finita y $\theta_1(x,y) \vdash \theta_2(x,y)$, también $\theta_2(x,y)$ es finita.*

2. *Si $\theta_1(x,y)$ es gruesa, $\theta_2(x,y)$ es simétrica y $\theta_1(x,y) \vdash \theta_2(x,y)$, entonces también $\theta_2(x,y)$ es gruesa.*
3. *Si $\theta_1(x,y)$ y $\theta_2(x,y)$ son finitas (gruesas), entonces $\theta_1(x,y) \wedge \theta_2(x,y)$ es finita (gruesa).*
4. *Si $\theta_1(x,y)$ y $\theta_2(x,y)$ son finitas (gruesas), entonces $\theta_1(x,y) \vee \theta_2(x,y)$ es finita (gruesa).*
5. *Si $\theta(x,y)$ es gruesa, también $\theta^n(x,y)$ es gruesa.*
6. *Si $\theta_1(x,y)$ y $\theta_2(x,y)$ son gruesas, entonces $\theta_1(x,y) \circ \theta_2(x,y)$ es gruesa.*

Prueba. *3* se sigue del Teorema de Ramsey. El resto es inmediato.

Definición 2.3 $\mathrm{nc}(x,y)$ es el conjunto formado por todas las fórmulas gruesas $\theta(x,y)$.

Observación 2.2 $\mathrm{nc}(x,y)$ *es un tipo parcial, cerrado bajo conjunción, disyunción y producto. Si $\theta(x,y)$ es simétrica y $\mathrm{nc}(x,y) \vdash \theta(x,y)$, entonces $\theta(x,y) \in \mathrm{nc}(x,y)$.*

Proposición 2.3 *Las siguientes condiciones son equivalentes para $a \neq b$:*

1. $\models \mathrm{nc}(a,b)$.
2. *Hay una secuencia infinita indiscernible $(a_i : i < \omega)$ con $a = a_0$ y $b = a_1$.*
3. *Hay una secuencia infinita indiscernible $(a_i : i < \omega)$ y hay $i \neq j$ tales que $a = a_i$ y $b = a_j$.*

Prueba. *1* $\Rightarrow$ *2*. Por la Proposición 1.1 es suficiente mostrar que hay una secuencia infinita $(a_i : i < \omega)$ tal que para $i < j$, $\mathrm{tp}(a_i a_j) = \mathrm{tp}(ab)$. Sea $p(x,y) = \mathrm{tp}(a,b)$. Hay que mostrar la consistencia del conjunto de fórmulas

$$\{x_i \neq x_j : i < j < \omega\} \cup \bigcup_{i<j<\omega} p(x_i, x_j)$$

y eso significa garantizar que para cada fórmula $\varphi(x,y) \in p$ hay una secuencia infinita $(a_i : i < \omega)$ tal que $\models \theta(a_i, a_j)$ siempre que $i < j < \omega$. Si esto no es así entonces $\neg\varphi(x,y)$ es una fórmula finita y por tanto $x = y \vee (\neg\varphi(x,y) \wedge \neg\varphi(y,x))$ es gruesa. En definitiva, $\models \neg\varphi(a,b)$, en contra de la suposición de que $\varphi \in p = \mathrm{tp}(ab)$. Es claro que *2* $\Rightarrow$ *3*. Verificamos finalmente *3* $\Rightarrow$ *1*. Si $\theta(x,y)$ es gruesa y $\models \neg\theta(a,b)$, entonces, por indiscernibilidad $\models \neg\theta(a_i, a_j)$ siempre que $i < j < \omega$ (o siempre que $j < i < \omega$) y esto contradice la hipótesis de que θ sea finita.

Dado que las fórmulas gruesas son, por definición, reflexivas, resulta que $\models \mathrm{nc}(a,a)$ para cada a. Si admitimos secuencias indiscernibles de la forma $(a, a, a, \ldots)$ podemos generalizar (simplemente en notación y terminología) la proposición previa a a, b arbitrarios. Para ello basta suprimir entonces la condición de que la secuencia indiscernible sea infinita (es decir, que todos sus elementos sean distintos) aunque mantenemos la longitud infinita de la secuencia. De acuerdo con ello, las realizaciones de $\mathrm{nc}(x, y)$ son los pares (a, b) para los que hay una secuencia indiscernible $(a_i : i < \omega)$ y hay $i \neq j$ tales que $a = a_i$ y $b = a_j$. Una vez se ha clarificado esto, nos vamos a permitir en el futuro usar expresiones del tipo "a, b están juntos en una secuencia infinita indiscernible I"para reformular que $\mathrm{nc}(a, b)$.

Si suprimimos la condición de reflexividad en las fórmulas gruesas y se redefine nc de modo correspondiente resulta que la proposición anterior sigue siendo correcta pero ya no lo es esta última observación. Para finalizar la discusión de la reflexividad indicamos que

1. Si $\theta(x, y)$ es simétrica y finita, entonces $\theta(x, y) \vee x = y$ es gruesa.
2. Si $\theta(x, y)$ es gruesa, entonces $\theta(x, y) \wedge x \neq y$ es simétrica y finita.

Por tanto, añadir o quitar la reflexividad en la definición de fórmula gruesa no tiene mayor trascendencia y es más bién cuestión de convención. Algo similar ocurre con la simetría. Obsérvese que $\mathrm{nc}(x, y)$ es un conjunto de axiomas para el tipo parcial formado por todas las fórmulas finitas y reflexivas $\theta(x, y)$. Ello se debe a que si $\theta(x, y)$ es finita, entonces $\theta(x, y) \wedge \theta(y, x)$ es finita y simétrica. Es gruesa si adicionalmente $\theta(x, y)$ es reflexiva. Por tanto, si $\mathrm{nc}(x, y) \vdash \theta(x, y)$, entonces $\theta(x, y) \wedge \theta(y, x) \in \mathrm{nc}(x, y)$.

$\mathrm{nc}^n(x, y)$ es un tipo parcial cuyas realizaciones son los pares (a, b) que son conectables mediante n secuencias indiscernibles de longitud infinita, es decir, para los que hay $a_1, \ldots, a_{n+1}$ y secuencias indiscernibles infinitas $I_1, \ldots, I_n$ tales que $a = a_1, b = a_{n+1}$ y para cada i, $a_i, a_{i+1} \in I_i$. Este tipo parcial se axiomatiza mediante $\{\theta^n(x, y) : \theta(x, y) \in \mathrm{nc}(x, y)\}$. Obsérvese que

$$\mathrm{nc}(x, y) \supseteq \mathrm{nc}^2(x, y) \supseteq \mathrm{nc}^3(x, y) \supseteq \ldots$$

Obsérvese también que la clausura transitiva de la relación definida mediante $\mathrm{nc}(x, y)$ se define mediante la disyunción infinita $\bigvee_n \mathrm{nc}^n(x, y)$.

Proposición 2.4 *$E_L(a, b)$ si y sólo si $\models \bigvee_n \mathrm{nc}^n(a, b)$.*

Prueba. La relación definida por $\bigvee_n \mathrm{nc}^n(x, y)$ es invariante. Por el Lema 1.3 sabemos que $\mathrm{nc}(x, y)$ es acotada, de manera que también lo es la relación definida por esta disyunción infinita. Por tanto extiende a E_L. Para la otra dirección usamos la transitividad de E_L, de modo que basta establecer que $E_L(a, b)$ con la hipótesis de que $\models \mathrm{nc}(a, b)$. Podemos suponer que $a \neq b$, con lo cual a y b están juntos en una secuencia indiscernible infinita I. La cardinalidad de I puede ser tan grande como queramos. Si $\neg E_L(a, b)$ entonces, por invariancia, también $\neg E_L(a', b')$ para cualesquiera otros a', b' ordenados de la misma manera en I. Eso contradice la acotación de E_L.

Usaremos la notación $a \equiv_M b$ para indicar que $\mathrm{tp}(a/M) = \mathrm{tp}(b/M)$.

Lema 2.5 *1. Si $\models \mathrm{nc}(a, b)$, entonces hay un modelo M tal que $a \equiv_M b$.*

2. Si hay un modelo M tal que $a \equiv_M b$, entonces $\models \mathrm{nc}^2(a, b)$.

Prueba. *1.* Supóngase que a, b son dos elementos distintos tales que $\models \mathrm{nc}(a, b)$. Entonces a y b empiezan una secuencia infinita indiscernible I. Fijemos un modelo M. Por Erdös-Rado hay un conjugado M' de M para el que I es M'-indiscernible. Claro está, $\mathrm{tp}(a/M') = \mathrm{tp}(b/M')$. Para *2*, supongamos que $a \equiv_M b$. Por compacidad basta ver que para cada fórmula gruesa $\theta(x,y)$ podemos obtener un c tal que $\models \theta(a,c) \wedge \theta(c,b)$. Escojamos $n < \omega$ máximo para el que hay una secuencia $(a_i : i < n)$ tal que $\neg\theta(a_i, a_j)$ siempre que $i < j$. Dentro de M debe haber también una tal secuencia, de manera que podemos suponer que está dentro de M. Por elección de n, debe haber un $i < n$ tal que $\models \theta(a, a_i)$. Como $a \equiv_M b$, también $\theta(b, a_i)$ y por simetría $\models \theta(a_i, b)$.

Ejemplo 2.1 *Consideremos la teoría de una relación de equivalencia con infinitas clases y donde todas las clases tienen dos elementos. Sean a, b dos elementos distintos en una misma clase fuera de un modelo M. Entonces $a \equiv_M b$ pero a y b no están juntos en una secuencia infinita indiscernible, de manera que $\not\models \mathrm{nc}(a,b)$.*

Proposición 2.6 *$E_L(a,b)$ si y sólo si para algún número natural n hay modelos $M_1, \ldots, M_n$ y secuencias $a_1, \ldots, a_n$ tales que*

$$a \equiv_{M_1} a_1 \equiv_{M_2} a_2 \equiv_{M_3} a_3 \equiv \ldots \equiv_{M_n} a_n = b$$

Prueba. Por la Proposición 2.4 y el Lema 2.5.

Definición 2.4 Sea $\alpha \leq \omega$ un ordinal. Una fórmula $\theta(x,y)$ es *α-gruesa* si existe una secuencia $(\theta_i(x,y) : i < \alpha)$ formada por fórmulas gruesas y tal que $\theta_0 = \theta$ y para cada $i < \alpha$, $\theta^2_{i+1}(x,y) \vdash \theta_i(x,y)$.

Proposición 2.7 *E_{KP} se define mediante el tipo parcial formado por todas las fórmulas ω-gruesas.*

Prueba. Cualquier tipo parcial formado por fórmulas ω-gruesas define una relación de equivalencia acotada que, naturalmente, extiende a E_{KP}. Para mostrar la otra dirección fijemos un tipo parcial $\pi(x,y)$ que define E_{KP}. Podemos elegirlo formado por fórmulas gruesas y cerrado bajo conjunciones. Vemos ahora que, de hecho, esas fórmulas tienen que ser ω-gruesas. Sea θ_0 una tal fórmula. Como $\pi(x,y) \cup \pi(y,z) \vdash \theta_0(x,z)$, por compacidad existe $\theta_1 \in \pi$ tal que $\theta_1^2 \vdash \theta_0$. Iterando este procedimiento se obtiene una secuencia de fórmulas gruesas que garantiza que θ_0 es ω-gruesa.

Definición 2.5 Para cualquier relación R entre secuencias definimos $\overline{R}$ como la menor relación tipo-definible que extiende a R.

Si R es una relación invariante entre I-secuencias, entonces R define un subconjunto en el espacio topológico $S_{I^\frown I}(\emptyset)$, a saber el conjunto formado por los tipos $p(x,y)$ tales que para cada (para alguna) realización $ab \models p$ se tiene $R(a,b)$. Pues $\overline{R}$ define entonces la clausura topológica de ese conjunto.

Observación 2.8

1. *$\overline{R}$ es tipo-definible mediante las fórmulas $\varphi(x,y)$ tales que $\models \varphi(a,b)$ siempre que $R(a,b)$.*
2. *$\overline{R}(a,b)$ si y sólo si para cada $\varphi(x,y)$ tal que $\models \varphi(a,b)$ existen a', b' tales que $R(a',b')$ y $\models \varphi(a',b')$.*

Proposición 2.9 *$\overline{E_L}$ es axiomatizable mediante las fórmulas que son n-gruesas para cada $n < \omega$.*

Prueba. Se verifica fácilmente que las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier fórmula $\varphi = \varphi(x, y)$:

1. $E_L(x, y) \vdash \varphi(x, y)$
2. $\bigvee_n \mathrm{nc}^n(x, y) \vdash \varphi(x, y)$
3. $\mathrm{nc}^n(x, y) \vdash \varphi(x, y)$ para cada n.
4. Para cada $n < \omega$ hay $\theta \in \mathrm{nc}(x, y)$ tal que $\theta^n(x, y) \vdash \varphi(x, y)$.
5. φ es n-gruesa para cada $n < \omega$.

Problema 2.1 *Supóngase que $E_L = E_{KP}$. ¿ Existe un m tal que $\bigvee_n \mathrm{nc}^n(x, y) \equiv \mathrm{nc}^m(x, y)$?*

3. Hiperimaginarios

Necesitamos hablar ahora de hiperimaginarios, de manera que repasamos brevemente los hechos básicos. Un *hiperimaginario* es una clase de equivalencia de la forma a/E donde a es una secuencia (quizás infinita) y E es una relación de equivalencia entre secuencias (de la misma longitud que a) y es tipo-definible sobre $\emptyset$. La *longitud* del hiperimaginario es la longitud de la secuencia a. El tipo de un hiperimaginario $a' = a/E$ sobre otro hiperimaginario $b' = b/F$ se define como la unión de todos los tipos de la forma

$$\exists uv(E(x, u) \land \varphi(u, v) \land F(b, v))$$

asociados a todas las fórmulas $\varphi(u, v)$ para las que hay a_1, b_1 tales que $E(a, a_1)$, $F(b, b_1)$ y $\models \varphi(a_1, b_1)$. El resultado principal sobre esta noción es que

$$\mathrm{tp}(a/e) = \mathrm{tp}(b/e) \iff f(a) = b \text{ para algún } f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/e)$$

Cuando e es un hiperimaginario hay que entender que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/e) = \{f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}) : f(e) = e\}$ Las secuencias ordinarias pueden ser también consideradas como hiperimaginarios eligiendo como E la identidad. También una secuencia de hiperimaginarios puede ser tratada como un simple hiperimaginario. Por tanto la anterior definición sirve para dar sentido también al tipo de un hiperimaginario o secuencia de hiperimaginarios sobre un conjunto de hiperimaginarios (tratada como secuencia de hiperimaginarios). La *clausura definible* de un hiperimaginario a es la clase $\mathrm{dcl}(a)$ formada por todos los hiperimaginarios b que son fijados por $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/a)$, es decir, que verifican la condición $f(b) = b$ para cada $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/a)$. Los hiperimaginarios a, b son *interdefinibles* o *equivalentes* si $a \in \mathrm{dcl}(b)$ y $b \in \mathrm{dcl}(a)$, es decir, si $\mathrm{dcl}(a) = \mathrm{dcl}(b)$ o, expresado finalmente en términos de automorfismos, si $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/a) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/b)$.

Decimos que un hiperimaginario a/E es *acotado* si tiene órbita acotada en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$. Esto ocurre en particular cuando E es una relación de equivalencia acotada. Por ejemplo, todas las clases de E_{KP} son hiperimaginarios acotados. Más generalmente, si e es un hiperimaginario, se dice que a/E es e-acotado si la órbita de a/E en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/e)$ es acotada. $\mathrm{bdd}(A)$ es la clase de los hiperimaginarios A-acotados y $\mathrm{bdd}(e)$ la clase de los hiperimaginarios

e-acotados. Resulta que todo hiperimaginario es equivalente a una secuencia de hiperimaginarios de longitud numerable. Por tanto $\mathrm{bdd}(e)$ (como secuencia) es equivalente a la clase formada por los hiperimaginarios e-acotados cuya longitud es un ordinal numerable. De hecho podemos restringirnos a considerar únicamente los hiperimaginarios de α-secuencias para $\alpha \leq \omega$. Para cada tal α hay a lo sumo $2^{|T|}$ relaciones de equivalencia entre α-secuencias que son e-acotadas y son tipo-definibles sobre el conjunto vacío. Y para cada tal relación de equivalencia E hay a lo sumo $2^{2^{|T|}}$ clases de equivalencia. En definitiva, hay a lo sumo $2^{2^{|T|}}$ hiperimaginarios del tipo considerado. La conclusión es que podemos formar una secuencia con ellos que es de nuevo equivalente a un único hiperimaginario. Uniendo todo esto vemos que hay un hiperimaginario e' tal que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/\mathrm{bdd}(e)) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/e')$. Por tanto podemos tratar $\mathrm{tp}(a/\mathrm{bdd}(e))$ como $\mathrm{tp}(a/e')$, es decir, como un tipo sobre un simple hiperimaginario.

Un *A-hiperimaginario* es la clase de equivalencia a/E de una secuencia a en una relación de equivalencia A-definible E. Todo hiperimaginario es un A-hiperimaginario, pero no a la inversa.

Lema 3.1 *Si e es un A-hiperimaginario, existe un hiperimaginario e' tal que* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/eA) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/e')$. *Si e es A-acotado, e' puede elegirse también A-acotado*

Prueba. Sea $e = b/E$, siendo E una relación de equivalencia tipo-definible sobre A. Sea a una secuencia que enumera A y pongamos $E = E(x, y; a)$. Definimos entonces

$$E'(xz, yu) \ \Leftrightarrow \ (z = u \models \mathrm{tp}(a) \wedge E(x, y; z)) \vee xz = yu$$

Se trata de una relación de equivalencia tipo-definible sobre $\emptyset$. Es fácil comprobar que $e' = ba/E'$ tiene las propiedades anunciadas.

Proposición 3.2 *Para cada hiperimaginario e, la relación $F(x, y) \Leftrightarrow$* $\mathrm{tp}(x/e) = \mathrm{tp}(y/e)$ *es tipo-definible sobre cualquier representante de e.*

Prueba. Sea $e = a/E$. Entonces $F(x, y) \Leftrightarrow \exists u(E(a, u) \wedge \mathrm{tp}(xa) = \mathrm{tp}(xu))$.

Proposición 3.3 *$E_{KP}(a, b)$ en $T(A)$ si y sólo si* $\mathrm{tp}(a/\mathrm{bdd}(A)) = \mathrm{tp}(b/\mathrm{bdd}(A))$.

Prueba. Consideremos primero el caso $A = \emptyset$. Podemos tratar $\mathrm{bdd}(\emptyset)$ como un hiperimaginario. La relación $E(a, b) \Leftrightarrow \mathrm{tp}(a/\mathrm{bdd}(\emptyset)) = \mathrm{tp}(b/\mathrm{bdd}(\emptyset))$ es acotada y es tipo-definible sobre $\emptyset$, y eso implica que $E_{KP} \subseteq E$. La proposición anterior garantiza que es tipo definible sobre un representante, pero como es invariante también es tipo-definible sobre $\emptyset$. Para justificar la otra dirección, supongamos que $E(a, b)$. Observemos que $e = a/E_{KP}$ es un hiperimaginario acotado y por ello un elemento de $\mathrm{bdd}(\emptyset)$. Entonces, como hay un automorfismo que fija e y transforma a en b, tenemos que $e = b/E_{KP}$, esto es, $E_{KP}(a, b)$. Para el caso general no podemos aplicar simplemente lo ya establecido a $T(A)$ dado que $\mathrm{bdd}(A)$ no es, en principio, lo mismo que $\mathrm{bdd}(\emptyset)$ calculado en $T(A)$. $\mathrm{bdd}(A)$ está formado por los hiperimaginarios A-acotados pero $\mathrm{bdd}(\emptyset)$ en $T(A)$ está formado por los A-hiperimaginarios A-acotados. Sin embargo el lema 3.1 soluciona este problema.

4. Restricción de una relación de equivalencia a un tipo completo $p(x) \in S(\emptyset)$

Si R es una relación entre I-secuencias, x es una I-secuencia de variables y $p(x)$ un tipo, mediante $R \upharpoonright p$ nos referimos a la restricción de R a $p(\mathfrak{C})$, es decir $R \upharpoonright p = \{(a, b) \in R : a \models p \text{ y } b \models p\}$.

Sea E una relación de equivalencia establecida entre realizaciones $p(\mathfrak{C})$ de un tipo completo $p(x) \in S(\emptyset)$ y supongamos que E es tipo-definible sobre $\emptyset$. Existe una relación de equivalencia E' entre todas las secuencias de la longitud adecuada (realicen $p(x)$ o no) que es tipo-definible sobre $\emptyset$ y coincide con E en $p(\mathfrak{C})$, es decir, cumple la condición $E' \upharpoonright p = E$. Simplemente se pone

$$E'(x, y) \leftrightarrow (p(x) \wedge p(y) \wedge E(x, y)) \vee x = y.$$

Sin embargo si E es acotada no es tan fácil obtener una tal E' acotada. Veremos que, sin embargo, es posible.

Sea $p(x) \in S(\emptyset)$. Definimos $E_L^{(p)}$ como la menor relación invariante y acotada establecida entre realizaciones de $p(x)$. Similarmente se define $E_{KP}^{(p)}$ como la menor relación de equivalencia acotada y tipo-definible establecida entre realizaciones de p.

Proposición 4.1 *Sea* $p(x) \in S(\emptyset)$.

1. $E_L \upharpoonright p = E_L^{(p)}$
2. $E_{KP} \upharpoonright p = E_{KP}^{(p)}$

Prueba. Por definición es inmediato que $E_L^{(p)} \subseteq E_L \upharpoonright p$ y que $E_{KP}^{(p)} \subseteq E_{KP} \upharpoonright p$. Por otro lado si P es la colección de todos los tipos completos sobre $\emptyset$ (en las variables x) excluido p mismo, la relación $E(x, y) \Leftrightarrow E_L^{(p)} \vee \bigvee_{q \in P}(E_L \upharpoonright q)(x, y)$ es acotada e invariante de manera que contiene a E_L. Por tanto $E_L \upharpoonright p \subseteq E_L^{(p)}$. Respecto a E_{KP}, observemos que la relación

$$E(x, y) \Leftrightarrow \bigwedge_{e \in \mathrm{bdd}(\emptyset)} \mathrm{tp}(x/e) = \mathrm{tp}(y/e)$$

es acotada y tipo-definible sobre $\emptyset$. Es claro que es una relación de equivalencia acotada pues para cada $e \in \mathrm{bdd}(\emptyset)$ la relación $\mathrm{tp}(x/e) = \mathrm{tp}(y/e)$ es acotada (sus clases se corresponden con los distintos tipos sobre e en las variables x). Es claro también que es tipo-definible sobre cualquier familia (completa) de representantes de los hiperimaginarios $e \in \mathrm{bdd}(\emptyset)$. Como es invariante, se concluye que es tipo-definible sobre $\emptyset$. Establecido esto, supongamos ahora que a, b son realizaciones de $p(x)$ tales que $E_{KP}(a, b)$ y veamos que $E_{KP}^{(p)}(a, b)$. Por ser E tipo definible y acotada sabemos que $E(a, b)$. Sea F una extensión de $E_{KP}^{(p)}$ a una relación de equivalencia entre todas las secuencias de la longitud acotada y que coincide en p con $E_{KP}^{(p)}$ y sea $e = a/E_{KP}^{(p)} = a/F$. Se trata de un hiperimaginario acotado, esto es, $e \in \mathrm{bdd}(\emptyset)$. Por tanto $\mathrm{tp}(a/e) = \mathrm{tp}(b/e)$. Pero de eso se sigue que $F(a, b)$ y por tanto que $E_{KP}^{(p)}(a, b)$.

Proposición 4.2 *Si E es una relación de equivalencia definida entre realizaciones de un tipo completo $p(x)$ y se trata de una relación acotada y tipo-definible sobre $\emptyset$, entonces existe* *una relación de equivalencia E' entre todas las secuencias de la longitud considerada que es acotada y tipo-definible sobre $\emptyset$ y coincide con E en p.*

Prueba. Como $E_{KP} \upharpoonright p \subseteq E$, basta poner $E'(x,y) \Leftrightarrow (p(x) \wedge p(y) \wedge E(x,y)) \vee E_{KP}(x,y)$.

Corolario 4.3 *Todo hiperimaginario acotado es una clase de equivalencia de una relación de equivalencia tipo-definible y acotada.*

Prueba. Sea $e = a/E$ un hiperimaginario acotado y sea $p(x) = \mathrm{tp}(a)$. Entonces $E \upharpoonright p$ es una relación de equivalencia acotada y tipo-definible establecida entre realizaciones de p. Por la proposición previa hay una relación de equivalencia tipo-definible y acotada F tal que $F \upharpoonright p = E \upharpoonright p$. Pero $e = a/F$.

5. Los grupos $\mathrm{Autf}(\mathfrak{C}) = \mathrm{Aut}_L(\mathfrak{C})$ y $\mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$

Definición 5.1 Si A es un conjunto de parámetros, $\mathrm{Autf}(\mathfrak{C}/A)$ es el subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ generado por $\bigcup\{\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/M) : A \subseteq M \preceq \mathfrak{C}\}$. La condición $M \preceq \mathfrak{C}$ es innecesaria dado que la notación implícitamente supone que todos los modelos considerados son submodelos elementales del modelo monstruo. Por otra parte también estamos presuponiendo que el universo de M es pequeño, es decir, es un conjunto y no una clase propia. Una notación alternativa para este grupo de automorfismos es $\mathrm{Aut}_L(\mathfrak{C}/A)$. Con la notación $\mathrm{Lstp}(a/A)$ nos referimos al *tipo fuerte de Lascar de a sobre A*, que definimos como la órbita de a en $\mathrm{Aut}_L(\mathfrak{C}/A)$. En todas estas notaciones, cuando A se omite, se entiende que se trata del conjunto vacío.

Observación 5.1 $\mathrm{Autf}(\mathfrak{C}/A)$ *es un subgrupo normal de* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$.

Prueba. Para simplificar notación ponemos $A = \emptyset$. Sea $f \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C})$ y $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$. Entonces hay modelos $M_1, \ldots, M_n$ y correspondientes automorfismos $f_i \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/M_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ tales que $f = f_1 \cdots f_n$. Entonces $gf_ig^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/g(M_i))$ y $gfg^{-1} = (gf_1g^{-1}) \cdots (gf_ng^{-1})$, de modo que $gfg^{-1} \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C})$.

Proposición 5.2 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $E_L(a,b)$
2. $\mathrm{Lstp}(a) = \mathrm{Lstp}(b)$
3. $f(a) = b$ *para algún* $f \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C})$.

Prueba. La equivalencia *1* $\Leftrightarrow$ *2* se obtiene por la Proposición 2.6. La equivalencia *2* $\Leftrightarrow$ *3* se obtiene inmediatamente a partir de las definiciones.

Lema 5.3 *Sean* $f, g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$.

1. *Si* $f \restriction M = g \restriction M$ *para algún modelo* $M \supseteq A$*, entonces* $f \equiv g$ *módulo* $\mathrm{Autf}(\mathfrak{C}/A)$.

2. *Si* $\mathrm{tp}(f(m)/M) = \mathrm{tp}(g(m)/M)$ *para algún modelo* $M \supseteq A$ *y alguna secuencia* m *que enumera un modelo que contiene a* A*, entonces* $f \equiv g$ *módulo* $\mathrm{Autf}(\mathfrak{C}/A)$.

Prueba. Respecto a *1*, obsérvese que gf^{-1} es la identidad en M y por ello $gf^{-1} \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C}/A)$. Para *2*, vemos que podemos elegir $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/M)$ tal que $h(f(m)) = g(m)$. Por *1*, $hf \equiv g$ módulo $\mathrm{Autf}(\mathfrak{C}/A)$. Como $h \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C}/A)$, de ello se sigue que $f \equiv g$ módulo $\mathrm{Autf}(\mathfrak{C}/A)$.

Proposición 5.4 *Si* $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$*, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $f \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C}/A)$

2. $\mathrm{Lstp}(a/A) = \mathrm{Lstp}(f(a)/A)$ *para cada secuencia* a.

3. $\mathrm{Lstp}(m/A) = \mathrm{Lstp}(f(m)/A)$ *para alguna secuencia* m *que enumera un modelo que contiene a* A.

Prueba. Sólo hay que establecer *3* $\Rightarrow$ *1*. La hipótesis nos permite escoger $h \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C}/A)$ tal que $m = h(f(m))$. Por el Lema 5.3 tenemos que $hf \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C}/A)$ y por tanto también $f \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C}/A)$.

Definición 5.2 $\mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$ es el subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$ que conserva todas las E_{KP}-clases. Así pues, $f \in \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$ si y sólo si para cada secuencia a, $E_{KP}(a, f(a))$. $\mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C}/A)$ es el correspondiente grupo en $T(A)$.

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ es de modo natural un grupo topológico. Una base de abiertos-cerrados viene dada por los conjuntos $O_{a,b} = \{f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A) : f(a) = b\}$ asociados a secuencias finitas a, b. Esta topología es Hausdorff y totalmente disconexa, pero en general no es compacta. Ésta es la topología de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ que consideraremos en lo sucesivo.

Observaciones 5.5

1. $\mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C}/A)$ *es un subgrupo normal y cerrado de* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$.

2. $\mathrm{Autf}(\mathfrak{C}/A)$ *es un subgrupo de* $\mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C}/A)$.

3. $\mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C}/A) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/\mathrm{bdd}(A))$

4. $E_{KP}(a,b)$ *si y sólo si existe un* $f \in \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$ *tal que* $f(a) = b$.

Prueba. Basta considerar el caso $A = \emptyset$. Sea $f \in \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$ y $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$. Para cualquier a, tenemos $E_{KP}(g^{-1}(a), f(g^{-1}(a)))$ y por tanto $E_{KP}(a, g(f(g^{-1}(a))))$. Eso significa que $gfg^{-1} \in \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$ y por tanto que el subgrupo es normal. Para verificar que es cerrado basta mostrar que $f \in \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$ siempre que $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$ tiene la propiedad de que para cada tupla a existe $g \in \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$ tal que $f(a) = g(a)$. Pero eso es claro dado que E_{KP} es tipo-definible. Respecto al segundo punto, supongamos que $f \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C})$. Entonces para cada tupla a, $E_L(a, f(a))$ y por ello $E_{KP}(a, f(a))$. Por tanto $f \in \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$. El tercer punto se sigue de la Proposición 3.3 y el cuarto punto se sigue del tercero.

Observación 5.6 *Las siguientes condiciones son equivalentes para $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$.*

1. $f \in \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C}/A)$
2. *En $T(A)$, $E_{KP}(a, f(a))$ para cada tupla a.*
3. *En $T(A)$, $E_{KP}(m, f(m))$ para alguna secuencia m que enumera un modelo que contiene a A.*

Prueba. Únicamente la dirección *3* $\Rightarrow$ *1* necesita justificación. Sea $E_{KP}(m, f(m))$. Por las observaciones previas existe $g \in \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C}/A)$ tal que $m = g(f(m))$. Usando el Lema 5.3, vemos que $gf \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C}/A) \subseteq \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C}/A)$. Por tanto, $f \in \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C}/A)$.

Proposición 5.7 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{Autf}(\mathfrak{C}) = \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$
2. $E_L = E_{KP}$
3. $E^n_L = E^n_{KP}$ *para cada* $n < \omega$ *y* $\mathrm{Autf}(\mathfrak{C})$ *es un cerrado en* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$.

Prueba. *1* $\Rightarrow$ *2*. Ya sabemos que $E_L \subseteq E_{KP}$. Sean a, b secuencias tales que $E_{KP}(a, b)$. Por la Proposición 5.5 existe $f \in \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$ tal que $f(a) = b$. Por *1*, $f \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C})$, de modo que se concluye que $E_L(a, b)$. La dirección *2* $\Rightarrow$ *3* es obvia dado que, de acuerdo con la Proposición 5.5, $\mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$ es cerrado. Mostramos finalmente que *3* $\Rightarrow$ *1*. Sea $f \in \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$ y veamos que $f \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C})$. Como este subgrupo es cerrado, basta ver que f es un punto de acumulación suyo, es decir, que para cada tupla a existe $g \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C})$ tal que $f(a) = g(a)$. Consideremos una tal tupla a. Entonces $E_{KP}(a, f(a))$ y por la hipótesis $E_L(a, f(a))$, de modo que, por la Proposición 5.2 hay $g \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{C})$ tal que $f(a) = g(a)$.

6. El grupo $\mathrm{Saut}(\mathfrak{C}) = \mathrm{Aut}_{Sh}(\mathfrak{C})$

Definición 6.1 $\mathrm{Saut}(\mathfrak{C}/A)$ es el subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ formado por los automorfismos f tales que para cada relación de equivalencia finita y A-definible E establecida entre tuplas de $\mathfrak{C}$ de tiene $E(a, f(a))$ para cada tupla a de la longitud correspondiente. Una notación alternativa para este grupo es $\mathrm{Aut}_{Sh}(\mathfrak{C}/A)$.

Recordemos que la noción de tipo fuerte (de Shelah) se define por

$$\mathrm{stp}(a/A) = \mathrm{stp}(b/A) \Leftrightarrow E(a, b) \text{ para cada relación de equivalencia finita y } A\text{-definible } E$$

Recordemos que un *imaginario* es una clase de equivalencia a/E de una tupla a en una relación de equivalencia E finita y definible sobre $\emptyset$. Los imaginarios son un caso particular de hiperimaginarios. Pero los imaginarios, a diferencia de los hiperimaginarios, conforman una estructura multivariada $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ en la que cada cociente asociado a una relación de equivalencia entre tuplas E definible sin parámetros es un nuevo universo. Se conserva la estructura de $\mathfrak{C}$ en el universo asociado a la igualdad y se añaden las proyecciones $\pi_E : \mathfrak{C}^n \to \mathfrak{C}^n/E$ definidas por $\pi_E(a) = a/E$. Todo automorfismo de $\mathfrak{C}$ es extiende de modo único a un automorfismo de $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$. $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ es la clausura algebraica de A calculada en $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$. Obsérvese que $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A) = \mathrm{bdd}(A) \cap \mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$.

Lema 6.1 *Las siguientes condiciones son equivalentes para una relación definible $R \subseteq \mathfrak{C}^n$.*

1. *R tiene órbita finita en* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$
2. *R es una unión de clases de una relación de equivalencia finita y definible sobre A.*
3. *R es definible sobre* $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$.
4. *R es definible sobre cualquier $M \supseteq A$.*

Prueba. *1* $\Rightarrow$ *2*. Sean $R_1, \ldots, R_n$ los distintos A–conjugados de R. Consideremos la relación de equivalencia $E(a,b) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n}(a \in R_i \leftrightarrow b \in R_i)$. E es definible y es A-invariante, de modo que es definible sobre A. Es claro que cada R_i es una unión de clases de E. *2* $\Rightarrow$ *3*. Sea E una relación de equivalencia finita y A–definible y supongamos que R es la unión de las clases $a_1/E, \ldots, a_n/E$. Digamos que E se define mediante $\varphi(b,x,y)$ con $b \in A$ y $\varphi(u,x,y) \in L$. Consideramos la relación $F(ux, wy)$ definida de modo que $F(ux, wy)$ se da tanto cuando $\varphi(u,x,y)$ es una relación de equivalencia en x, y y $u = w$ y $\varphi(u,x,y)$ como cuando $\varphi(u,x,y)$ no es una relación de equivalencia en x, y y x, y, w son arbitrarios. Se trata de una relación de equivalencia 0-definible, de modo que ba_i/F es un típico elemento de $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$. Además es algebraico sobre A pues la fórmula $\exists x \pi_F(b,x) = z$ tiene sólo un número finito de soluciones. Así pues, $ba_i/F \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ para $i = 1, \ldots, n$. Pero podemos definir R mediante la fórmula $\pi_F(b,x) = ba_1/F \vee \ldots \vee \pi_F(b,x) = ba_n/F$. *3* $\Rightarrow$ *4*. Es claro que R debe ser definible sobre cada $M^{\mathrm{eq}} \supseteq A$ pues $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A) \subseteq M^{\mathrm{eq}}$. Es fácil ver que de ello se sigue que también es entonces definible en $\mathfrak{C}$ sobre cada $M \supseteq A$. *4* $\Rightarrow$ *1*. Sea $M \supseteq A$ un modelo de cardinalidad $\kappa = |A| + |T|$. Si R tiene infinitos A-conjugados entonces debe tener al menos κ^+ de ellos, digamos que estos son $(R_i : i < \kappa^+)$. La hipótesis implica que también cada R_i es definible sobre todo modelo que extiende a A y en particular sobre M. Pero hay a lo sumo κ definiciones posibles con parámetros en M, de modo que dos de estos conjugados deben tener la misma definición y por ello deben coincidir.

Proposición 6.2

1. $\mathrm{stp}(a/A) = \mathrm{stp}(b/A)$ *si y sólo si* $\mathrm{tp}(a/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)) = \mathrm{tp}(b/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A))$
2. $\mathrm{Saut}(\mathfrak{C}/A) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A))$

Prueba. Por el lema anterior.

Observación 6.3 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{stp}(a/A) = \mathrm{stp}(b/A)$
2. $E_{Sh}(a,b)$
3. $f(a) = b$ *para algún* $f \in \mathrm{Saut}(\mathfrak{C}/A)$

Prueba. Inmediato a partir de los resultados previos.

Observación 6.4

1. $\mathrm{Saut}(\mathfrak{C}/A)$ *es un subgrupo normal y cerrado de* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$.
2. $\mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C}/A)$ *es un subgrupo de* $\mathrm{Saut}(\mathfrak{C}/A)$.

Prueba. Se verifica sin dificultades, particularmente si se tiene en cuenta que $\mathrm{Saut}(\mathfrak{C}/A) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A))$.

Observación 6.5 *Las siguientes condiciones son equivalentes para* $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$

1. $f \in \mathrm{Saut}(\mathfrak{C}/A)$
2. $\mathrm{stp}(a/A) = \mathrm{stp}(f(a)/A)$ *para cada tupla* a
3. $E_{Sh}(a, f(a))$ *en* $T(A)$ *para cada secuencia (tupla)* a.

Prueba. Es claro, dado que $\mathrm{Saut}(\mathfrak{C}/A)$ es un cerrado.

Proposición 6.6 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{Saut}(\mathfrak{C}) = \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$
2. $E_{Sh} = E_{KP}$
3. $E^n_{Sh} = E^n_{KP}$ *para cada* $n < \omega$.

Prueba. Por los resultados previos y los correspondientes sobre E_{KP} y $\mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$.

7. El círculo

Sea C un círculo de perímetro unidad y sea $n \geq 1$ un número natural. Consideramos una estructura cuyo universo es C y en la que hay dos relaciones establecidas:

1. La relación triádica $B(x, y, z)$ que rige cuando y está entre x y z, es decir, cuando x, y, z son puntos distintos del círculo y avanzando en sentido horario desde x primero se encuentra y y luego z.
2. La relación $R(x, y)$ que se da entre x e y cuando la distancia entre x e y es menor que $1/n$, es decir, cuando la longitud del menor arco que une a x con y es menor que $1/n$.

La relación $R'(x, y)$ que se da entre x e y cuando la distancia entre uno y otro es a lo sumo $1/n$ es definible mediante la fórmula

$$\forall u(B(x, u, y) \to R(x, u)) \vee \forall u(B(y, u, x) \to R(y, u)).$$

Claramente también es definible la función f que asigna a cada $x \in C$ el único elemento $f(x)$ que está a distancia $1/n$ de x por la derecha:

$$f(x) = y \leftrightarrow \neg R(x, y) \wedge \forall u(B(x, u, y) \to R(x, u)).$$

A su vez, R puede definirse en términos de f mediante la fórmula

$$B(x, y, f(x)) \vee B(y, x, f(y)).$$

Resulta más fácil axiomatizar el círculo con B y f que con B y R. Por tanto cambiamos la presentación y tomamos como primitivas la relación B y la función f. Como axiomas adoptamos los siguientes enunciados

1. Para cada x, $\{(y, z) : B(x, y, z)\}$ es un orden total (estricto) denso y sin extremos entre todos los elementos distintos de x.

2. $B(x,y,z) \to B(z,x,y)$.

3. $f^n(x) = x$.

4. $B(x, f(x), f^2(x))$.

5. $B(x,y,z) \to B(f(x), f(y), f(z))$.

Para ser precisos deberíamos añadir a la lista de axiomas el enunciado que asegura que hay al menos dos elementos. El primer axioma puede ser sustituido a todos los efectos por el que dice que ese orden es total y no tiene menor elemento. Eso se verá en las posteriores pruebas de completud. De los dos primeros axiomas se sigue que

$$B(x,y,z) \wedge B(x,z,z') \to B(y,z,z').$$

Proposición 7.1 *Los dos primeros axiomas determinan una teoría completa en el lenguaje de B que es ω-categórica y tiene eliminación de cuantificadores.*

Prueba. Se hace back-and-forth con los isomorfismos parciales finitos. Para añadir un nuevo elemento a a dom$g$ enumeramos $a_1, \ldots, a_m$ los elementos de este conjunto de acuerdo con el orden inducido por a y se escoge b tal que $B(b_n, b, b_1)$ (donde $b_i = g(a_i)$). Basta verificar que $B(a, a_i, a_j) \Leftrightarrow B(b, b_i, b_j)$ y para ello pasta ver que $B(b, b_i, b_{i+1})$ para cada $i < m$, lo cual no ofrece mayores dificultades.

Consideramos ahora el sistema de axiomas para B y f. Los dos siguientes enunciados se obtienen como teoremas:

1. $B(f(x), f(y), f(z)) \to B(x,y,z)$

2. $B(x, y, f(x)) \to B(y, f(x), f(y))$

Proposición 7.2 *Los axiomas propuestos determinan una teoría completa en el lenguaje de B y f que es ω-categórica y tiene eliminación de cuantificadores.*

Prueba. De nuevo se trata de un back-and-forth, en este caso formado por isomorfismos parciales entre conjuntos f-cerrados y finitamente generados. Supongamos que añadimos un elemento nuevo a al dominio del isomorfismo parcial g. Enumeramos los elementos del dominio de g de acuerdo con el orden inducido por a: $a_1, \ldots, a_m$. Vamos a mostrar que es suficiente con obtener b tal que $B(b_n, b, b_1)$ (donde $b_i = g(a_i)$. Como ya se ha indicado antes, escogiendo b así se garantiza que se tiene un isomorfismo parcial respecto a B, pero ahora hay que garantizar que ese isomorfismo se extiende a los valores $f(b), f^2(b), \ldots, f^n(b)$. Por tanto hay que prestar atención a los enunciados de los siguientes tres tipos

1. $B(f^i(b), f^j(b), f^j(b))$

2. $B(f^i(b), b_j, f^k(b))$

3. $B(f^i(b), b_j, b_k)$

Los del primer tipo no ofrecen dificultad pues los axiomas determinan los que son verdaderos y los que son falsos de acuerdo con quienes sean i, j, k. Un enunciado del segundo tipo es equivalente a una disyunción de enunciados de la forma $B(b, b_l, f(b))$, que a su vez son equivalentes a $B(b_l, f(b), f(b_l))$ y por tanto a $B(f^{-1}(b_l), b, b_l)$. Quedan, por tanto, determinados por la posición de b mismo respecto a los elementos $b_1, \ldots, b_m$. Lo mismo ocurre con los enunciados del tercer tipo (aplíquese f^{-i}).

Lema 7.3 *Sea a un elemento del círculo y escojamos un arco I contenido en el intervalo $(a, f(a))$. Supóngase que no hay mayor elemento a la izquierda de I ni menor elemento a la derecha. Para cada $i < n$ sea I_i el correspondiente arco obtenido al rotar $2i\pi/n$, es decir, $I_i = \{f^i(x) : x \in I\}$, entendiendo que $f^0(x) = x$. Entonces el resultado de eliminar los elementos de estos arcos $I_0, \ldots, I_{n-1}$ es un submodelo elemental del círculo.*

Prueba. El resultado de quitar estos arcos es una subestructura que satisface los axiomas. La eliminación de cuantificadores muestra que es elemental.

Proposición 7.4 *Si a, b son elementos del círculo, $R(a, b)$ si y sólo si a y b tienen el mismo tipo sobre un submodelo elemental.*

Prueba. Sea $R(a, b)$ y sea I el arco entre $[a, b]$ (de longitud menor que $1/n$). Sea M el submodelo elemental obtenido a partir de I como se indica en el lema previo. Por eliminación de cuantificadores se ve que $\mathrm{tp}(a/M) = \mathrm{tp}(b/M)$. Por otro lado, si a y b no están relacionados en R y M es un submodelo elemental, podemos encontrar $c, d \in M$ tales que $B(d, a, c)$ pero $\neg B(d, b, c)$ y por ello $\mathrm{tp}(a/M) \neq \mathrm{tp}(b/M)$. La razón de que existan c y d es que entre x y $f(x)$ siempre tiene que haber elementos de M (para cualquier $y \in M$ alguno de los elementos $y, f(y), f^2(y), \ldots, f^{n-1}(y)$ debe estar entre ellos).

Corolario 7.5 *Cualesquiera dos elementos del círculo tienen el mismo tipo de Lascar pero si a y b están en polos opuestos del círculo para ningún $m < n/2$ podemos encontrar submodelos elementales $M_1, \ldots, M_m$ y elementos $a_1, \ldots, a_{m+1}$ tales que $a = a_1, b = a_m$ y $\mathrm{tp}(a_i/M_i) = \mathrm{tp}(a_{i+1}/M_i)$ para cada i.*

8. $E_{KP} = \overline{E_L} \circ \mathrm{nc}$

Lema 8.1 *Sea $\theta(x, y)$ gruesa, sea A un conjunto y a una tupla (de la longitud de x). Hay entonces una fórmula $\varphi(x) \in \mathrm{tp}(a/A)$ tal que para todo tipo $q(x) \in S(A)$ tal que $\varphi(x) \in q$ existe $b \models q$ tal que $\models \theta(b, a)$*

Prueba. Sea $b_1, \ldots, b_n$ una secuencia maximal de realizaciones de $p(x) = \mathrm{tp}(a/A)$ tales que $\models \neg\theta(b_i, b_j)$ para cada $i < j \leq n$. Entonces $p(x) \vdash \bigwedge_{i=1}^n \theta(x, b_i)$, de modo que, por compacidad, hay $\varphi(x) \in p$ tal que $\varphi(x) \vdash \bigwedge_{i=1}^n \theta(x, b_i)$. Veamos que esta fórmula tiene las propiedades anunciadas. Sea $q(x) \in S(A)$ tal que $\varphi(x) \in q$ y sea $c \models q$. Entonces $\models \theta(c, b_i)$ para algún i. Escojamos $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ tal que $f(b_i) = a$. Tenemos entonces que si $b = f(c)$ resulta que $b \models q$ y $\models \theta(b, a)$.

Proposición 8.2 *Sea R una relación invariante definida entre realizaciones de un tipo completo $p(x) \in S(\emptyset)$. Para cualquier fórmula gruesa θ, $\overline{R} \subseteq R \circ \theta$.*

Prueba. Supongamos que $\overline{R}(a, b)$. Aplicando el lema anterior a $\mathrm{tp}(b/a)$ y θ obtenemos una fórmula $\varphi(x, a) \in \mathrm{tp}(b/a)$ tal que para cada $q(x) \in S(a)$ con $\varphi(x, a) \in q$, existe $c \models q$ tal que $\models \theta(c, b)$. Como $\overline{R}(a, b)$ y $\models \varphi(b, a)$, hay a', b' tales que $R(a', b')$ y $\models \varphi(b', a')$. Como tanto a como a' son realizaciones de p, por conjugación obtenemos b'' tal que $R(a, b'')$ y $\models \varphi(b'', a)$. Tomando ahora $q = \mathrm{tp}(b''/a)$ vemos que $\varphi(x, a) \in q$, y por tanto debe haber $c \models q$ tal que $\models \theta(c, b)$. Por invariancia de R, $R(a, c)$.

Proposición 8.3 *Para cada tipo completo* $p(x) \in S(\emptyset)$, $E_{KP} \restriction p = \overline{(E_L \restriction p)} \circ \mathrm{nc}$.

Prueba. Pongamos $E = E_L \restriction p$. Mostramos que $\overline{E} \circ \mathrm{nc}$ es transitiva. Como es tipo-definible, de ello se sigue que debe ser $E_{KP} \restriction p$. Como E, $\overline{E}$ y nc son relaciones simétricas, podemos permutar los factores de una composición suya. Necesitamos establecer los dos siguientes puntos:

1. $\overline{E} \circ \overline{E} \cdots \circ \overline{E} \subseteq \overline{E} \circ E$
2. $\overline{E} \circ E \subseteq \overline{E} \circ \mathrm{nc}$

Para el primer punto se puede efectuar una inducción, de manera que es suficiente con justificar que $\overline{E} \circ \overline{E} \subseteq \overline{E} \circ E$. Supongamos para ello que $\overline{E}(a, b)$ y $\overline{E}(b, c)$. Por la proposición previa, para cada fórmula gruesa θ podemos encontrar d tal que $\models \theta(a, d)$ y $E(d, b)$ y similarmente podemos encontrar e tal que $E(b, e)$ y $\models \theta(e, c)$. Entonces $E(d, e)$, de manera que aplicando ahora compacidad vemos que $\overline{E} \circ \overline{E} \subseteq \mathrm{nc} \circ \overline{E} \circ \mathrm{nc}$. Pero $\mathrm{nc} \circ \overline{E} \circ \mathrm{nc} = \overline{E} \circ \mathrm{nc}^2 \subseteq \overline{E} \circ E$. Para establecer ahora el segundo punto comenzamos con la situación de que $\overline{E}(a, b)$ y $E(b, c)$ y usamos otra vez la proposición previa para establecer que para cada $\theta(x, y)$ gruesa podemos encontrar d tal que $\models \theta(a, d)$ y $E(d, b)$. Entonces $E(d, c)$ y por compacidad concluimos que $\overline{E} \circ E \subseteq \mathrm{nc} \circ \overline{E}$. Establecidos estos dos puntos es fácil ver que $\overline{E} \circ \mathrm{nc}$ es transitiva, pues

$$\overline{E} \circ \mathrm{nc} \circ \overline{E} \circ \mathrm{nc} \subseteq \overline{E}^4 \subseteq \overline{E} \circ E \subseteq \overline{E} \circ \mathrm{nc}$$

Corolario 8.4 $E_{KP} = \overline{E_L} \circ \mathrm{nc}$

Prueba. Es claro que $\overline{E_L} \circ \mathrm{nc} \subseteq E_{KP}$. Por otro lado, si $E_{KP}(a, b)$ y $p(x) = \mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(b)$ tenemos que $(E_{KP} \restriction p)(a, b)$ y por la proposición anterior hay c tal que $\overline{E_L \restriction p}(a, c)$ y $\models \mathrm{nc}(c, b)$. En particular $\overline{E_L}(a, c)$.

9. Eliminación de hiperimaginarios

Se dice que T elimina los hiperimaginarios si para cada hiperimaginario e hay una secuencia de imaginarios $(e_i : i \in I)$ tal que $\mathrm{dcl}(e) = \mathrm{dcl}(e_i : i \in I)$.

Proposición 9.1 *T elimina los hiperimaginarios si y sólo si para cada tipo $p(x) \in S(\emptyset)$ y cada relación de equivalencia tipo-definible establecida entre realizaciones de p existe una familia $(E_i : i \in I)$ de relaciones de equivalencia definibles tal que $E = (\bigcap_{i \in I} E_i) \restriction p$. De hecho basta con que las E_i sean relaciones definibles cuya restricción $E_i \restriction p$ sea una relación de equivalencia.*

Prueba. La razón de que sea suficiente con exigir que las relaciones E_i sean de equivalencia al restringirse a p es que en ese caso tenemos que $p(x) \vdash E_i(x,x)$, que $p(x) \cup p(y) \vdash E_i(x,y) \to E_i(y,x)$ y que $p(x) \cup p(y) \cup p(z) \vdash E_i(x,y) \wedge E_i(y,z) \to E_i(x,z)$, de manera que, por compacidad, hay una fórmula $\varphi_i(x) \in p$ con las mismas propiedades puesta en lugar de $p(x)$. Entonces si se define $F_i(x,y) \Leftrightarrow \varphi_i(x) \wedge \varphi_i(y) \wedge E_i(x,y)$ resulta que F_i es una relación de equivalencia definible y que $(\bigcap_{i\in I} E_i) \upharpoonright p = (\bigcap_{i\in I} F_i) \upharpoonright p$.

La dirección de derecha a izquierda se muestra fácilmente. Supóngase que $e = a/E$ y que en $p(x) = \mathrm{tp}(a)$ la relación de equivalencia E coincide con la intersección $\bigcap_{i\in I} E_i$ de relaciones de equivalencia definibles E_i. Entonces $\mathrm{dcl}(e) = \mathrm{dcl}(e_i : i \in I)$ donde $e_i = a_i/E_i$, siendo a_i la correspondiente subsecuencia finita de a. La otra dirección exige un poco más de trabajo. Sea E una relación de equivalencia en $p(x) \in S(\emptyset)$ y supongamos que E es definible mediante un tipo parcial sin parámetros. Sea $a \models p$. Por hipótesis el hiperimaginario $e = a/E$ es interdefinible con una secuencia $(e_i : i \in I)$ de imaginarios $e_i = a_i/E_i$. Para cada $i \in I$ sea $p_i(x,y) = \mathrm{tp}(aa_i)$. Se cumple lo siguiente

1. $E(x,x') \cup p_i(x,y) \cup p_i(x',z) \vdash E_i(y,z)$
2. $p_i(a,a_i)$
3. $p(x) \vdash \exists y p_i(x,y)$

Por compacidad podemos sustituir $p_i(x,y)$ por una simple fórmula $\varphi_i(x,y) \in p_i$ en las propiedades anteriores. Definimos entonces

$$F_i(y,z) \ \Leftrightarrow\ \exists uv(E_i(u,v) \wedge \varphi_i(y,u) \wedge \varphi_i(z,v)).$$

Entonces F_i es una relación definible, $F_i \upharpoonright p$ es de equivalencia y $E = (\bigcap_{i\in I} F_i) \upharpoonright p$.

Proposición 9.2 *Si T elimina los hiperimaginarios, también $T(A)$ los elimina.*

Prueba. Por el Lema 3.1.

Proposición 9.3 $E_{Sh} = E_{KP}$ *si y sólo si para cada tipo $p(x) \in S(\emptyset)$ y cada relación de equivalencia tipo-definible y acotada establecida entre realizaciones de p existe una familia $(E_i : i \in I)$ de relaciones de equivalencia definibles tal que $E = (\bigcap_{i\in I} E_i) \upharpoonright p$. Como en el caso anterior, basta que cada E_i sea definible y que $E_i \upharpoonright p$ sea una relación de equivalencia.*

Prueba. Como la Proposición 9.1.

Corolario 9.4 *Si T elimina los hiperimaginarios, entonces $E_{Sh} = E_{KP}$ en $T(A)$ para cada conjunto A*

Prueba . Por las proposiciones previas. También puede demostrarse directamente comparando $\mathrm{bdd}(A)$ y $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$.

Corolario 9.5 *Supóngase que $E_L = E_{KP}$ en $T(A)$ para cada conjunto A. Entonces* $\mathrm{Lstp} = \mathrm{stp}$ *si y sólo si para cada tipo $p(x) \in S(A)$ y cada relación de equivalencia tipo-definible sobre A y A-acotada establecida entre realizaciones de p existe una familia $(E_i : i \in I)$ de relaciones de equivalencia A-definibles tal que $E = (\bigcap_{i\in I} E_i) \upharpoonright p$.*

Prueba. Por la Proposición 9.3.

10. El ejemplo donde Lstp $\neq$ stp

Sea C un círculo en el plano real y sea α la función que asigna a cada dos puntos x, y del círculo el ángulo $\alpha(x, y) \in [0, 2\pi)$ comprendido entre x e y (en sentido horario desde x hacia y). Sea M la estructura formada por el cuerpo real, el círculo C y la aplicación α. Sea $\mathfrak{C} \succeq M$ un modelo monstruo de esta teoría. Es una estructura bivariada que consta de un cuerpo $R^{\mathfrak{C}}$ que extiende elementalmente al cuerpo real $\Re$ y un círculo $C^{\mathfrak{C}}$.

Llamemos ángulos de $\mathfrak{C}$ a los valores de $\alpha^{\mathfrak{C}}$, esto es, a los elementos de $R^{\mathfrak{C}}$ comprendidos en el intervalo $[0, 2\pi)$. Cada ángulo γ de $\mathfrak{C}$ determina un automorfismo de $\mathfrak{C}$, el automorfismo f_γ que es la identidad en $R^{\mathfrak{C}}$ y que aplica al círculo la rotación de ángulo γ.

Proposición 10.1 *Para cada ángulo $\gamma \in \mathbb{R}$, $f_\gamma \notin \mathrm{Aut}_{KP}(\mathfrak{C})$.*

Prueba. La relación E definida en $C^{\mathfrak{C}}$ por

$$E(a, b) \;\Leftrightarrow\; \alpha(a, b) < 1/n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

es una relación de equivalencia tipo-definible y acotada y sin embargo nunca tenemos que $E(a, f_\gamma(a))$.

Lema 10.2 *Sea $\gamma \in R^{\mathfrak{C}}$ un ángulo y sea E una relación de equivalencia finita entre tuplas de $C^{\mathfrak{C}}$ que es definible sobre $R^{\mathfrak{C}}$. Para cada tupla $a \in C^{\mathfrak{C}}$, $E(a, f_\gamma(a))$.*

Prueba. Dados E y a como en el enunciado, definimos X_a como la órbita de a bajo todos las rotaciones f_γ asociadas a todos los ángulos γ de $\mathfrak{C}$. Si $a = a_1, \ldots, a_n$, también se puede caracterizar X_a como el conjunto de todas las tuplas $b = b_1, \ldots, b_n$ tales que $\alpha(b_i, b_j) = \alpha(a_i, a_j)$ para todo $i, j \leq n$. Decimos que un ángulo γ es bueno si hay una tupla $b \in X_a$ tal que $E(b, f_\gamma(b))$ y que es malo en caso contrario. Sucede entonces que γ es bueno si y sólo si para cada $b \in X_a$, $E(b, f_\gamma(b))$. En efecto, si $b_1, b_2 \in X_a$ y $\beta = \alpha(b_1, b_2)$ y suponemos que $E(b_1, f_\gamma(b_1))$, resulta que $E(f_\beta(b_1, f_\beta(f_\gamma(b_1)))$ (pues E es definible sobre $R^{\mathfrak{C}}$ y f_β es la identidad en $R^{\mathfrak{C}}$), de manera que $E(b_2, f_\gamma(b_2))$ puesto que $b_2 = f_\beta(b_1)$ y $f_\gamma(f_\beta(b_1)) = f_\beta(f_\gamma(b_1))$. Finalizaremos la prueba mostrando que todos los ángulos son buenos. Observemos que la suma de ángulos buenos es un ángulo bueno y por ello que si un ángulo β es malo, entonces tambiés es malo β/n para cualquier n. Mostramos ahora que si hay un ángulo malo β, entonces E tiene infinitas clases, en contra de la hipótesis de que E era una relación finita. Sea n un número natural. Para cada $m \leq n$ el ángulo $\frac{m}{n!}\beta$ es también malo. Por tanto las tuplas $a, f_{\frac{1}{n!}\beta}(a), \ldots, \ldots, f_{\frac{n}{n!}\beta}(a)$ están todas en clases distintas de E.

Proposición 10.3 *Para cada ángulo $\gamma \in R^{\mathfrak{C}}$, $f_\gamma \in \mathrm{Aut}_{Sh}(\mathfrak{C})$.*

Prueba. Sea E una relación de equivalencia entre tuplas de $\mathfrak{C}$ que es finita y definible sin parámetros. Sea a una tupla arbitraria y sea b la subtupla de a forma7uda por los elementos que están en el cuerpo $R^{\mathfrak{C}}$ y c la subtupla formada por los elementos del círculo $C^{\mathfrak{C}}$. E induce una relación de equivalencia F entre tuplas del círculo $C^{\mathfrak{C}}$ que también es finita y es definible sobre b. Se define por $F(x, y) \Leftrightarrow E(x^\frown b, y^\frown b)$, siendo $x^\frown z$ la tupla de $\mathfrak{C}$ que se construye a partir de las tuplas x y z de $C^{\mathfrak{C}}$ y $R^{\mathfrak{C}}$ del mismo modo que a se obtiene de c y b. Por el lema previo sabemos que $F(b, f_\gamma(b))$ y de ello se sigue inmediatamente que $E(a, f_\gamma(a))$.

Referencias

[1] E. Casanovas *Thick formulas*. Preprint. Marzo de 1999.

[2] E. Casanovas *The new example*. Preprint. Febrero de 2000.

[3] E. Casanovas, D. Lascar, A. Pillay y M. Ziegler *Galois groups of first order theories*. Preprint. Diciembre de 2000.

[4] B. Hart, B. Kim y A. Pillay *Coordinatization and canonical bases in simple theories*. The Journal of Symbolic Logic 65 (2000) 293-309.

[5] E. Hrushovski *Simplicity and the Lascar group*. Preprint. 1997.

[6] B. Kim *A note on Lascar strong types*, The Journal of Symbolic Logic 63 (1998) 926-936.

[7] D. Lascar *The category of models of a complete theory*, The Journal of Symbolic Logic 47 (1982) 249-266.

[8] D. Lascar y A. Pillay *Hyperimaginaries and automorphism groups*. Por aparecer en The Journal of Symbolic Logic.

[9] M. Ziegler *A note on bounded hyperimaginaries*. Preprint. Junio de 2000.

[10] M. Ziegler *On a theorem of Lascar*. Preprint. Junio de 2000.

[11] M. Ziegler *The topology of the Lascar group*. Preprint. Octubre de 2000.