Teoría de Modelos

E. Casanovas

1999 - 2000
Revisado Septiembre 2003

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Un *tipo de semejanza* o un *lenguaje* es un conjunto de símbolos, cada uno de los cuales puede ser una *constante* o un *símbolo de función n–ádico* para algún número natural $n \geq 1$ o, finalmente, un *predicado n–ádico* para algún $n \geq 1$. Usamos habitualmente $c, d, \ldots$ para constantes, $F, G, \ldots$ para símbolos de función, $P, Q, R, \ldots$ para predicados y L para lenguajes. Los *símbolos lógicos* son los *conectores* $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, los *cuantificadores* $\forall$, $\exists$, el *símbolo de igualdad* $\doteq$, los paréntesis), (y las *variables* $v_0, v_1, \ldots$. Si el contexto lo permite usamos $=$ en vez de $\doteq$ para el símbolo de igualdad. También usamos x, y, z, u, v, w para referirnos a variables cualesquiera e incluso a tuplas de variables.

Sea L un lenguaje. Los *términos* de L son las variables, las constantes de L y las expresiones obtenidas con la siguiente regla: si $F \in L$ es un símbolo de función n–ádico y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de L, entonces también lo es $Ft_1 \ldots t_n$. Para facilitar la lectura escribimos a veces $F(t_1, \ldots, t_n)$ en vez de $Ft_1 \ldots t_n$. Usamos t, r para términos. La notación $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ se usa para expresar que las variables que aparecen en el término t están en la lista de distintas variables $x_1, \ldots, x_n$, lo cual no significa que todas ellas deban aparecer en t. Sin necesidad de escribir $t = t(x_1, \ldots, x_n)$, la mera introducción de la notación $t(x_1, \ldots, x_n)$ tiene el mismo significado, a saber, que consideramos un término cuyas variables están en la lista $x_1, \ldots, x_n$.

Las *ecuaciones* del lenguaje L son las expresiones de la forma $t_1 = t_2$, donde t_1 y t_2 son términos de L. Las *fórmulas atómicas* de L son las ecuaciones de L y las expresiones de la forma $Rt_1 \ldots t_n$ donde $R \in L$ es un predicado n–ádico y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de L. En vez de $Rt_1 \ldots t_n$ escribimos en ocasiones $R(t_1, \ldots, t_n)$ para facilitar la lectura. Las *fórmulas* de L son las fórmulas atómicas de L y las expresiones obtenibles mediante las siguientes reglas:

1. Si φ es una fórmula de L, también lo es $\neg\varphi$.
2. Si φ y ψ son fórmulas de L, también lo son $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
3. Si φ es una fórmula de L y x es una variable, entonces también $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$ son fórmulas de L.

Usamos φ, ψ, χ, $\theta, \ldots$ y en ocasiones también δ y σ para fórmulas y usamos Σ, Γ, Δ y a veces también Φ, Ψ, para conjuntos de fórmulas. Obsérvese que el número de términos de L y también el número de fórmulas de L es a lo sumo $|L| + \omega$.

Una aparición de una variable x en una fórmula φ es una aparición *ligada* si está dentro de una fórmula de la forma $\forall x\psi$ o $\exists x\psi$. En otro caso se dice que se trata de una aparición *libre*. Las *variables libres* de una fórmula son las que tienen alguna aparición libre en la fórmula. Todas las variables de una fórmula atómica son por tanto libres. La notación $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ se usa para indicar que las variables libres de φ aparecen en la secuencia de distintas variables $x_1, \dots, x_n$. Como en el caso de los términos, la mera introducción de $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ implica que estamos considerando una fórmula cuyas variables libres están entre $x_1, \dots, x_n$. Una *sentencia* es una fórmula sin variables libres.

Con $t \in L$ y $\varphi \in L$ indicamos que t es un término de L y que φ es una fórmula de L. La notación $\varphi \in L_n$ se usa para expresar que φ es una fórmula de L y que para alguna secuencia $x_1, \dots, x_n$, $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$. Normalmente $\varphi(x) \in L_n$ supone que x es una n–tupla de variables. En ocasiones queremos hacer una separación en dos grupos de las variables libres de φ. Por ejemplo, $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$ separa las variables $x_1, \dots, x_n$ de las variables $y_1, \dots, y_m$. Se sobreentiende entonces que los conjuntos de variables en cuestión son disjuntos y que las variables libres de la fórmula aparecen en la lista completa $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$. Finalmente, $\varphi(x, y) \in L_{n,m}$ indica que x es una n–tupla de variables y que y es una m–tupla (disjunta de x).

Se dice que M es una *L–estructura* o una *estructura de tipo L* si M consta de un *universo*, que es un conjunto no vacío y que también designamos con M, y de una interpretación s^M de cada uno de los símbolos s de L de acuerdo con lo siguiente:

1. La interpretación de una constante es un elemento del universo: $c^M \in M$ para cada $c \in L$.
2. La interpretación de un símbolo funcional n–ádico es una operación n–ádica en el universo: $F^M : M^n \to M$ para cada $F \in L$ n–ádico.
3. La interpretación de un predicado n–ádico es una relación n–ádica en el universo: $R^M \subseteq M^n$ para cada $R \in L$ n–ádico.

Usamos M y N para estructuras.

Sea M una estructura de tipo L. Una interpretación de las variables en M es una función π que asigna a cada variable x un elemento $\pi(x)$ del universo de M. La *denotación* en M de un término $t \in L$ bajo una interpretación π es un elemento $t^M[\pi]$ del universo de M definido de acuerdo con lo siguiente:

1. $x^M[\pi] = \pi(x)$ para cada variable x.
2. $c^M[\pi] = c^M$ para cada constante $c \in L$.
3. $(Ft_1 \dots t_n)^M[\pi] = F^M(t_1^M[\pi], \dots, t_n^M[\pi])$ para cada $F \in L$ n–ádico y cualesquiera términos $t_1, \dots, t_n$ de L.

Se define además la relación de *satisfacción* $M \models \varphi[\pi]$ como sigue:

1. $M \models t_1 = t_2[\pi]$ si y sólo si $t_1^M[\pi] = t_2^M[\pi]$.
2. $M \models R(t_1, \dots, t_n)[\pi]$ si y sólo si $(t_1^M[\pi], \dots, t_n^M[\pi]) \in R^M$.
3. $M \models \neg\varphi[\pi]$ si y sólo si $M \not\models \varphi[\pi]$

4. $M \models (\varphi \wedge \psi)[\pi]$ si y sólo si $M \models \varphi[\pi]$ y $M \models \psi[\pi]$. Hay cláusulas análogas para $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ de acuerdo con el significado de cada conector.

5. $M \models \exists x \varphi[\pi]$ si y sólo si $M \models \varphi[\pi_x^a]$ para algún $a \in M$. Aquí π_x^a es la interpretación que coincide en todo con π excepto en que $\pi_x^a(x) = a$, es decir, $\pi_x^a = (\pi \setminus \{(x, \pi(x))\}) \cup \{(x, a)\}$.

6. $M \models \forall x \varphi[\pi]$ si y sólo si $M \models \varphi[\pi_x^a]$ para cada $a \in M$.

Se dice que M *satisface a* φ *con* π o que φ *es verdadera en* M *bajo* π si $M \models \varphi[\pi]$.

Lema 1.1 *Si las interpretaciones π_1 y π_2 asignan los mismos valores a las variables de t, entonces $t^M[\pi_1] = t^M[\pi_2]$. Y si π_1 y π_2 asignan los mismos valores a las variables libres de φ, entonces $M \models \varphi[\pi_1]$ si y sólo si $M \models \varphi[\pi_2]$.*

Si $t = t(x_1, \ldots, x_n)$, la única información que aporta π para determinar $t^M[\pi]$ es cuáles son los valores $\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)$. Si $a_1, \ldots, a_n \in M$, la notación $t^M[a_1, \ldots, a_n]$ se emplea para designar la denotación $t^M[\pi]$ bajo cualquier π que verifique $\pi(x_1) = a_1, \ldots, \pi(x_n) = a_n$. En particular, si en t no hay variables t^M es la denotación de t en M bajo cualquier interpretación π. Hay una notación análoga para fórmulas. Si $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, entonces $M \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ significa que $M \models \varphi[\pi]$ bajo cualquier π tal que $\pi(x_1) = a_1, \ldots, \pi(x_n) = a_n$. Y si φ es una sentencia, $M \models \varphi$ significa que $M \models \varphi[\pi]$ para cualquier π. En la práctica escribiremos $t^M(a_1, \ldots, a_n)$ en vez de $t^M[a_1, \ldots, a_n]$ y $M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ en vez de $M \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

Sea $x_1, \ldots, x_n$ una secuencia de variables distintas. La *sustitución simultánea* de las variables $x_1, \ldots, x_n$ por los términos $t_1, \ldots, t_n$ en el término t es el término

$$t\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_n \\ x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

obtenido al reemplazar al tiempo cada variable x_i que aparezca en t por el correspondiente término t_i. La *sustitución simultánea* de las variables $x_1, \ldots, x_n$ por los términos $t_1, \ldots, t_n$ en la fórmula φ es la fórmula

$$\varphi\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_n \\ x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

obtenida al reemplazar primero las variables ligadas de φ por otras que no aparezcan ni en $x_1, \ldots, x_n$ ni en ninguno de los términos t_i y a continuación reemplazar al tiempo cada variable x_i por el correspondiente término t_i. Se escribe en ocasiones $t(t_1, \ldots, t_n)$ en vez de $t\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_n \\ x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$ y $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ en vez de $\varphi\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_n \\ x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$.

Lema 1.2 *Sea $t_i = t_i(y_1, \ldots, y_m)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Si $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ entonces*

$$t(t_1, \ldots, t_n)^M[a_1, \ldots, a_m] = t^M(t_1^M(a_1, \ldots, a_m), \ldots, t_n^M(a_1, \ldots, a_m)).$$

Y si $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ entonces

$$M \models \varphi(t_1, \ldots, t_n)[a_1, \ldots, a_m] \Leftrightarrow M \models \varphi(t_1^M(a_1, \ldots, a_m), \ldots, t_n^M(a_1, \ldots, a_m))$$

Sean $L \subseteq L'$ lenguajes y sean M y M' estructuras de tipo L y L' respectivamente. Si tienen el mismo universo e interpretan del mismo modo los símbolos de L, entonces se dice que M' es una *expansión* de M a L' y que M es la *restricción* de M' a L. La restricción de M' a L se denota con $M' \upharpoonright L$.

Lema 1.3 *Sea M una estructura de tipo L y sea M' una expansión de M a $L' \supseteq L$. Si $t = t(x_1, \ldots, x_n) \in L$ y $a_1, \ldots, a_n \in M$, entonces $t^{M'}(a_1, \ldots, a_n) = t^M(a_1, \ldots, a_n)$. Y si $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L$ y $a_1, \ldots, a_n \in M$, entonces $M' \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ si y sólo si $M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$*

Sea M una estructura de tipo L y $A \subseteq M$. Sea $C = \{c_a : a \in A\}$ un conjunto de constantes tales que $c_a \neq c_b$ para cualesquiera $a, b \in A$ distintos y $c_a \notin L$ para cada $a \in A$. M posee una expansión natural a $L \cup C$, la expansión en la que cada constante c_a se interpreta como el correspondiente elemento a de A. Nos referimos con las notaciones

$$M_A = (M, (a)_{a \in A}) = (M, a)_{a \in A}$$

a esa expansión. Normalmente la elección del conjunto C es irrelevante y nos referimos al lenguaje ampliado $L \cup C$ con la notación $L(A)$. A menudo simplificaremos incluso la notación admitiendo que tomamos $a = c_a$, es decir, que cada elemento es usado como constante que se refiere a sí mismo en la expansión. Si el conjunto A es finito y la tupla a es una enumeración suya, también usamos (M, a) para referirnos a esta expansión de M.

Si Σ es un conjunto de fórmulas de L, se dice que Σ es *satisfacible* si existe una L–estructura y una interpretación π en M tales que $M \models \Sigma[\pi]$, es decir, tales que $M \models \sigma[\pi]$ para cada $\sigma \in \Sigma$. Esta noción es independiente de la elección de L. Una fórmula φ es satisfacible si el conjunto $\{\varphi\}$ lo es. Un conjunto de sentencias Σ es entonces satisfacible si existe una estructura M tal que $M \models \Sigma$, es decir $M \models \sigma$ para cada $\sigma \in \Sigma$. Decimos en ese caso que M es un *modelo* de Σ. Definimos además $\mathrm{Mod}_L(\Sigma)$ como la clase de todas las L–estructuras que son modelo de Σ. Para una sentencia σ ponemos $\mathrm{Mod}_L(\sigma) = \mathrm{Mod}_L(\{\sigma\})$.

Sea Σ un conjunto de fórmulas de L y φ una fórmula de L. Decimos que φ es *consecuencia* de Σ y escribimos $\Sigma \models \varphi$ si para cada L–estructura M y cada interpretación de las variables π en M, si $M \models \Sigma[\pi]$, entonces $M \models \varphi[\pi]$. Obviamente $\Sigma \not\models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible. Por el Teorema de Completud de la lógica de primer orden sabemos que $\Sigma \models \varphi$ es equivalente a $\Sigma \vdash \varphi$, es decir, a la existencia de una deducción de φ con premisas en Σ. Usamos la notación $\Sigma \vdash \varphi$ como equivalente a $\Sigma \models \varphi$ cuando lo consideramos conveniente. Esta noción es también independiente de la elección del lenguaje L. Para fórmulas φ y ψ ponemos $\varphi \models \psi$ en vez de $\{\varphi\} \models \psi$. Si Σ es un conjunto de sentencias de L y σ es una sentencia de L, entonces $\Sigma \models \sigma$ significa que $\mathrm{Mod}_L(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}_L(\sigma)$. Dos fórmulas φ y ψ son *lógicamente equivalentes* si $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \varphi$. Escribimos entonces $\varphi \equiv \psi$. Si se trata de sentencias de lenguaje L esto significa que $\mathrm{Mod}_L(\varphi) = \mathrm{Mod}_L(\psi)$.

La lógica proposicional es un fragmento de la lógica de primer orden. Fijemos un lenguaje L. Las variables proposicionales pueden identificarse con ciertas fórmulas de L, las *fórmulas primas*. Éstas son las fórmulas atómicas y las que comienzan con un cuantificador. Obsérvese que toda fórmula de L se obtiene a partir de las fórmulas primas mediante procedimientos propios de la lógica proposicional. Una *interpretación proposicional de L* es una aplicación que asigna a cada fórmula prima φ de L un elemento del conjunto $\{0, 1\}$. Si v es una interpretación proposicional de L, v se extiende de una única manera a una aplicación v^* que asigna a cada fórmula de L un elemento de $\{0, 1\}$ y cumple las condiciones

1. $v^*(\neg\varphi) = 1$ si y sólo si $v*(\varphi) = 0$
2. $v^*(\varphi \wedge \psi) = 1$ si y sólo si $v^*(\varphi) = v^*(\psi) = 1$
3. $v^*(\varphi \vee \psi) = 0$ si y sólo si $v^*(\varphi) = v^*(\psi) = 0$
4. $v^*(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ si y sólo si $v^*(\varphi) = 0$ y $v^*(\psi) = 1$
5. $v^*(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ si y sólo si $v^*(\varphi) = v^*(\psi)$.

Se dice que v satisface φ si $v^*(\varphi) = 1$. Una fórmula φ de L es una *tautología* si todas las interpretaciones proposicionales de L la satisfacen. Una fórmula φ de L es una *consecuencia tautológica* o *consecuencia proposicional* de un conjunto Σ de fórmulas de L si toda interpretación proposicional que satisface a todas las fórmulas de Σ satisface también a φ. Finalmente, un conjunto Σ de fórmulas de L es *proposicionalmente satisfacible* si hay una interpretación proposicional de L que satisface a todas las fórmulas de Σ. Se cumple lo siguiente

1. Las tautologías son fórmulas válidas.
2. Las consecuencias tautológicas son consecuencias.
3. Los conjuntos satisfacibles son proposicionalmente satisfacibles.

De acuerdo con el siguiente lema siempre es suficiente tratar problemas de satisfacibilidad y consecuencia para sentencias en vez de para fórmulas arbitrarias. Aunque no lo enunciemos explícitamente, lo mismo ocurre a nivel proposicional.

Lema 1.4 *Sea Σ un conjunto de fórmulas de L y φ una fórmula de L. Sea $C = \{c_n : n \in \omega\}$ un conjunto de nuevas constantes distintas, es decir $C \cap L = \emptyset$ y $c_n \neq c_m$ para $n \neq m$. Si Σ' y φ' son obtenidos a partir de Σ y φ sustituyendo cada variable v_n por la correspondiente constante c_n, entonces Σ' es un conjunto de sentencias de $L \cup C$, φ' es una sentencia de $L \cup C$ y además:*

1. *Σ es satisfacible si y sólo si Σ' es satisfacible.*
2. *$\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma' \models \varphi'$.*

Un *literal* es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica. Una fórmula está en *forma normal conjuntiva* si es una conjunción de disyunciones de literales y está en *forma normal disyuntiva* si es una disyunción de conjunciones de literales. Una fórmula está en *forma prenexa* si no tiene cuantificadores o es de la forma

$$Q_1x_1Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\varphi$$

donde φ no tiene cuantificadores, las variables son todas distintas y cada Q_i es o bien $\forall$ o bien $\exists$. Se llama a φ la *matriz* de la forma prenexa y a $Q_1x_1Q_2x_2 \ldots Q_nx_n$ es su *prefijo cuantificacional*.

Lema 1.5 *Para cada fórmula $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$ de L existe una correspondiente fórmula $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_m)$ de L que está en forma prenexa y es lógicamente equivalente a φ. Además podemos añadir la condición de que la matriz esté en forma normal disyuntiva o conjuntiva.*

Se dice que una fórmula es *universal* o es una fórmula $\forall$ si está en forma prenexa y el prefijo cuantificacional tiene únicamente cuantificadores universales. Es *existencial* o fórmula $\exists$ si está en forma prenexa y el prefijo cuantificacional sólo tiene cuantificadores existenciales. Esta terminología se inscribe dentro de una clasificación de las formas normales que describimos a continuación. Una fórmula es $\prod_n^0$ si está en forma prenexa y su prefijo consta de n bloques alternados de cuantificadores siendo el primer bloque una sucesión de cuantificadores universales, el segundo de existenciales, etc. Es $\sum_n^0$ si está en forma prenexa con un prefijo de n bloques alternados de cuantificadores siendo el primer bloque una sucesión de cuantificadores existenciales, el segundo de universales, etc. De acuerdo con esto, las fórmulas sin cuantificadores son las $\prod_0^0$ y las $\sum_0^0$, las universales son las $\prod_1^0$ y las existenciales son las $\sum_1^0$. Las fórmulas $\prod_2^0$ se llaman también fórmulas $\forall\exists$ y las $\sum_2^0$ se llaman también $\exists\forall$.

Definimos a continuación las formas normales de Skolem. Para cada fórmula φ hay una *forma normal de Skolem para la satisfacibilidad* y una *forma normal de Skolem para la validez*. Ninguna es, en general, equivalente a φ. Consideremos primero el caso de la satisfacibilidad. Para definir la forma de Skolem φ^{sk} de φ es conveniente transformar primero φ en una fórmula prenexa en cuyo prefijo no se repiten variables. Si en esta forma prenexa no hay cuantificadores existenciales ella misma es, por definición, la forma normal de Skolem para la satisfacibilidad. Supongamos que, por el contrario, tiene algún cuantificador existencial. Entonces es de la forma

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \psi$$

donde ψ es una fórmula prenexa con un cuantificador existencial menos y por tanto podemos suponer, efectuando una definición recursiva, que la forma normal de Skolem para la satisfacibilidad ψ^{sk} de ψ ya está definida. Elegimos un símbolo funcional n–ádico F que no aparezca en ψ^{sk} (una constante c que no aparezca en ψ^{sk} en el caso $n = 0$) y definimos

$$\varphi^{sk} = \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi^{sk}\binom{y}{Fx_1 \ldots x_n}.$$

Obsérvese que φ^{sk} tiene las mismas variables libres que φ y que no tiene el símbolo de igualdad a no ser que φ lo tenga. Por otro lado φ^{sk} puede tener símbolos que no aparecen en φ: constantes y símbolos funcionales. El hecho fundamental sobre estas fórmulas es el siguiente.

Lema 1.6 *La forma de Skolem para la satisfacibilidad φ^{sk} de φ es una fórmula universal que es satisfacible si y sólo si φ lo es.*

La forma de Skolem para la validez de φ se obtiene a partir de la forma normal para la satisfacibilidad de $\neg\varphi$. Si $(\neg\varphi)^{sk} = \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$ donde en ψ ya no hay cuantificadores, entonces se define la forma normal de Skolem para la validez de φ como la fórmula $\exists x_1 \ldots \exists x_n \neg\psi$. De nuevo es una fórmula con las mismas variables libres que φ y en la que no aparece el símbolo de igualdad si no aparece en φ. El correspondiente hecho fundamental es como sigue:

Lema 1.7 *La forma normal de Skolem para la validez de una fórmula φ es una fórmula existencial que es válida si y sólo si φ es válida.*

Con la única precaución de introducir constantes y símbolos funcionales distintos para fórmulas distintas se puede generalizar la construcción de formas de Skolem para la satisfacibilidad de modo que se aplique a conjuntos de fórmulas. Si Σ es un conjunto arbitrario de fórmulas, $\{\varphi^{sk} : \varphi \in \Sigma\}$ es un conjunto de fórmulas universales que es satisfacible si y sólo si Σ lo es. De este modo a efectos de satisfacibilidad basta tratar con fórmulas universales y a efectos de validez basta con fórmulas existenciales. Sin embargo ello es a costa de introducir símbolos funcionales. Existe una variante de la construcción de Skolem que no introduce nuevos símbolos funcionales sino nuevos predicados. La forma para la satisfacibilidad que se obtiene en este caso no es en general universal sino $\forall\exists$ y la forma para la validez es $\exists\forall$.

Una *teoría* de lenguaje L es un conjunto T de sentencias de L que está cerrado bajo consecuencia, es decir, que verifica $\sigma \in T$ para cada sentencia σ de L tal que $T \models \sigma$. Si K es una clase de estructuras de tipo L, la teoría de K es el conjunto de sentencias de L que son verdaderas en todas las estructuras de K. Se designa con $\mathrm{Th}(K)$ y obviamente es una teoría. Ponemos además $\mathrm{Th}(M) = \mathrm{Th}(\{M\})$. Por otro lado si Σ es un conjunto de sentencias de L, entonces $T = \{\sigma \in L : \Sigma \models \sigma\}$ es una teoría. Se dice que Σ es un conjunto de *axiomas* para T o una *axiomatización* de T. Se dice que una clase K de L–estructuras es Δ–*elemental* si hay un conjunto Σ de sentencias de L tal que $\mathrm{Mod}_L(\Sigma) = K$ y se dice que es *elemental* si hay una sentencia σ de L tal que $\mathrm{Mod}_L(\sigma) = L$. Obsérvese que si T es una teoría de lenguaje L, entonces $|T| = |L| + \omega$ es el número de fórmulas (y de sentencias) de L.

Lema 1.8 *1.* $\mathrm{Mod}_L(T) = \bigcap_{\sigma\in T} \mathrm{Mod}_L(\sigma)$.

2. $\mathrm{Th}(K) = \bigcap_{M\in K} \mathrm{Th}(M)$.

3. Si $K_1 \subseteq K_2$, *entonces* $\mathrm{Th}(K_2) \subseteq \mathrm{Th}(K_1)$.

4. Si $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, *entonces* $\mathrm{Mod}_L(\Sigma_2) \subseteq \mathrm{Mod}_L(\Sigma_1)$.

5. $\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}_L(\Sigma)) = \{\sigma \in L : \Sigma \models \sigma\}$.

6. $\mathrm{Mod}_L(\mathrm{Th}(K))$ *es la menor clase* Δ*–elemental que extiende a* K.

Capítulo 2

Homomorfismos

Definición (Homomorfismo, homomorfismo estricto) Sean M y N estructuras de tipo L. Una función $f : M \to N$ es un *homomorfismo* si

1. $f(c^M) = c^N$ para cada constante $c \in L$.
2. $f(F^M(a)) = F^N(f(a))$ para cada símbolo de función n–ádico $F \in L$ y cada n–tupla $a \in M$.
3. Si $a \in R^M$, entonces $f(a) \in R^N$ para cada predicado n–ádico $R \in L$ y cada n–tupla $a \in M$.

Se dice que el homomorfismo es *estricto* si además

4. $a \in R^M$ si y sólo si $f(a) \in R^N$ para cada predicado n–ádico $R \in L$ y cada n–tupla $a \in M$.

Definición (Fórmulas positivas) Se llaman fórmulas *positivas* a las fórmulas que se obtienen a partir de las fórmulas atómicas mediante conjunciones, disyunciones y cuantificación así como las fórmulas equivalentes a éstas.

Lema 2.1 *Sea $f : M \to N$ un homomorfismo.*

1. *Para cada término $t \in L$ y cada tupla $a \in M$, $f(t^M(a)) = t^N(f(a))$.*
2. *Si f es exhaustivo, para cada fórmula positiva $\varphi(x)$ y cada tupla $a \in M$, si $M \models \varphi(a)$, entonces $N \models \varphi(f(a))$.*
3. *Si f es exhaustivo y estricto, entonces para cada fórmula sin igualdad $\varphi(x)$ y cada tupla $a \in M$, $M \models \varphi(a)$ si y sólo si $N \models \varphi(f(a))$.*

Definición (Inmersión, isomorfismo) Una *inmersión* de M en N es un homomorfismo estricto inyectivo de M en N. Un *isomorfismo* entre M y N es una inmersión exhaustiva de M en N. Escribimos en ese último caso $f : M \cong N$. Decimos que M y N son *isomorfos* y escribimos $M \cong N$ si existe un isomorfismo entre M y N.

Lema 2.2 *Sea $f : M \to N$ una inmersión.*

1. *Para cada fórmula sin cuantificadores $\varphi(x)$ y cada tupla $a \in M$, $M \models \varphi(a)$ si y sólo $N \models \varphi(f(a))$.*
2. *Para cada fórmula existencial $\varphi(x)$ y cada tupla $a \in M$, si $M \models \varphi(a)$, entonces $N \models \varphi(f(a))$.*
3. *Para cada fórmula universal $\varphi(x)$ y cada tupla $a \in M$, si $N \models \varphi(f(a))$, entonces $M \models \varphi(a)$.*

Proposición 2.3 *Si f es un isomorfismo entre M y N, entonces para cada fórmula $\varphi(x)$ y cada tupla $a \in M$, $M \models \varphi(a)$ si y sólo si $N \models \varphi(f(a))$.*

Proposición 2.4 *1. La identidad en M es un isomorfismo entre M y M.*

2. *Si $f : M_1 \cong M_2$, entonces $f^{-1} : M_2 \cong M_1$.*
3. *Si $f : M_1 \cong M_2$ y $g : M_2 \cong M_3$, entonces $g \circ f : M_1 \cong M_3$.*

Definición (Congruencia, cociente) Una *congruencia en M* es una relación de equivalencia E en M tal que

1. Si $F \in L$ es n–ádico, para cualesquiera n–tuplas $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$ en M, si $E(a_i, b_i)$, entonces $E(F^M(a_1, \ldots, a_n), F^M(b_1, \ldots, b_n))$.
2. Si $R \in L$ es n–ádico, para cualesquiera n–tuplas $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$ en M, si $E(a_i, b_i)$, entonces $(a_1, \ldots, a_n) \in R^M$ si y sólo si $(b_1, \ldots, b_n) \in R^M$.

Si M es una estructura de tipo L y E es una congruencia en M, entonces el cociente M/E es la estructura de tipo L y universo M/E caracterizada por

1. $c^{M/E} = [c^M]_E$ para cada constante $c \in L$.
2. $F^{M/E}([a_1]_E, \ldots, [a_n]_E) = [F^M(a_1, \ldots, a_n)]_E$ para cada $F \in L$ n–ádico.
3. $R^{M/E} = \{([a_1]_E, \ldots, [a_n]_E) : (a_1, \ldots, a_n) \in R^M\}$ para cada $R \in L$ n–ádico.

Proposición 2.5 *Si E es una congruencia en M, entonces la aplicación $f : M \to M/E$ definida por $f(a) = [a]_E$ es un homomorfismo estricto exhaustivo. Y si $f : M \to N$ es un homomorfismo estricto exhaustivo y $E = \{(a, b) \in M \times M : f(a) = f(b)\}$, entonces E es una congruencia en M y la aplicación $g : M/E \to N$ definida por $g([a]_E) = f(a)$ es un isomorfismo entre M/E y N.*

Corolario 2.6 *Sea E una congruencia en M.*

1. *Para cada término $t(x_1, \ldots, x_n)$ y cada n–tupla $(a_1, \ldots, a_n)$ en M,*

$$t^{M/E}([a_1]_E, \ldots, [a_n]_E) = [t^M(a_1, \ldots, a_n)]_E.$$

2. *Para cada fórmula sin igualdad $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y cada n–tupla $(a_1, \ldots, a_n)$ en M,*

$$M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ si y sólo si } M/E \models \varphi([a_1]_E, \ldots, [a_n]_E).$$

Sea $E \in L$ un predicado diádico. Hay un conjunto $\Delta_{E,L}$ de sentencias de L que expresan que E es una congruencia respecto a los símbolos de L. Se trata del conjunto formado por las siguientes sentencias:

1. $\forall x E(x, x)$
2. $\forall xy(E(x, y) \to E(y, x))$
3. $\forall xyz(E(x, y) \wedge E(y, z) \to E(x, z))$
4. $\forall x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_n(E(x_1, y_1) \wedge \cdots \wedge E(x_n, y_n) \to E(F(x_1, \ldots, x_n), F(y_1, \ldots, y_n)))$ para cada símbolo funcional n-ádico $F \in L$
5. $\forall x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_n(E(x_1, y_1) \wedge \cdots \wedge E(x_n, y_n) \wedge R(x_1, \ldots, x_n) \to R(y_1, \ldots, y_n))$ para cada predicado n-ádico $R \in L$

Obviamente $M \models \Delta_{E,L}$ si y sólo si E^M es una congruencia en M.

Proposición 2.7 *Sea Σ un conjunto de sentencias sin igualdad, sea $E \in L$ un predicado diádico y sea $\Delta_{E,L}$ el conjunto de sentencias que expresan que E es una relación de congruencia respecto a los símbolos de L. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\Sigma \cup \Delta_{E,L}$ es satisfacible.*
2. *Σ tiene un modelo en el que E se interpreta como la igualdad.*

Prueba. Por un lado, si M es un modelo de $\Sigma \cup \Delta_{E,L}$ entonces E^M es una congruencia en M y M/E es un modelo de Σ en el que E se interpreta como la igualdad. Por otro lado, si M es un modelo de Σ en el que E se interpreta como la igualdad, entonces M también satisface $\Delta_{E,L}$ pues la igualdad es una congruencia en M.

Definición (Automorfismo) Un *automorfismo* de la estructura M es un isomorfismo de M en M. Si $A \subseteq M$, un *A–automorfismo* o *automorfismo sobre A* es un automorfismo de M_A, es decir, es un automorfismo de M que es la identidad en A. El conjunto de los automorfismos de A se designa con $\mathrm{Aut}(M)$ y el conjunto de los A-automorfismos de M con $\mathrm{Aut}_A(M)$ o $\mathrm{Aut}(M/A)$. Obviamente $\mathrm{Aut}(M)$ y $\mathrm{Aut}(M/A)$ son grupos con la operación de composición.

Proposición 2.8 *Para cada dos tuplas $a, b \in M$ de la misma longitud sea $O_{a,b} = \{f \in \mathrm{Aut}(M) : f(a) = b\}$. Los conjuntos $\{O_{a,b} : a, b \in M\}$ son una base de abierto-cerrados para una topología en $\mathrm{Aut}(M)$. Con esta topología $\mathrm{Aut}(M)$ es un grupo topológico Hausdorff y totalmente disconexo.*

Prueba. La colección $\mathcal{F} = \{O_{a,b} : a, b \in M\}$ verifica $\bigcup \mathcal{F} = \mathrm{Aut}(M)$ y está cerrada bajo intersecciones finitas dado que $O_{a,b} \cap O_{c,d} = O_{ac,bd}$. Por tanto es una base para una topología en $\mathrm{Aut}(M)$. Cada $O_{a,b}$ es un abierto-cerrado, pues $\mathrm{Aut}(M) \smallsetminus O_{a,b} = \bigcup\{O_{a,c} : c \in M,\ c \neq b\}$.

La topología es Hausdorff pues si, $f \neq g$ hay un elemento $a \in M$ tal que $f(a) \neq g(a)$. Entonces $f \in O_{a,f(a)}$, $g \in O_{a,g(a)}$ y $O_{a,f(a)} \cap O_{a,g(a)} = \emptyset$. Con esta topología $\mathrm{Aut}(M)$ es un grupo topológico pues la antiimagen de $O_{a,b}$ mediante la operación de producto de grupo es la unión de los conjuntos $O_{a,c} \times O_{c,b}$ para $c \in M$ y su antiimagen en la operación inversa del grupo es $O_{b,a}$.

Proposición 2.9 *Un subgrupo* G *de* $\mathrm{Aut}(M)$ *es cerrado si y sólo si existe una expansión* M' *de* M *tal que* $G = \mathrm{Aut}(M')$*.*

Prueba. Con esta topología, que un subconjunto X de $\mathrm{Aut}(M)$ sea cerrado significa que para cada f, $f \in X$ si y sólo si para cada tupla a existe un $g \in X$ tal que $f(a) = g(a)$. Entonces, si M' es una expansión de M y $G = \mathrm{Aut}(M')$ es claro que que G es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(M)$ y que el hecho de que un $f \in \mathrm{Aut}(M)$ pertenezca a G depende sólo de cómo f transforma las tuplas de M, de manera que si para cada tupla a hay $g \in G$ con $f(a) = g(a)$, tenemos que $f \in G$. A la inversa, si G es un subgrupo cerrado de $\mathrm{Aut}(M)$, para cada $n \geq 1$ consideramos las órbitas de las n–tuplas de M bajo la acción de G. Para cada tal órbita X introducimos un predicado n–ádico R_X y lo interpretamos como la órbita X. Sea M' la consiguiente expansión de M. Es fácil verificar que $G = \mathrm{Aut}(M')$.

Capítulo 3

Teoremas de Compacidad y Löwenheim-Skolem

Definición (Finitamente satisfacible, ejemplificaciones) Sea Σ un conjunto de sentencias de lenguaje L. Decimos que Σ *es finitamente satisfacible* si cada subconjunto finito de Σ es satisfacible. Sea además $C \subseteq L$ un conjunto de constantes. Decimos que Σ *tiene ejemplificaciones en C* si para cada fórmula con a lo sumo una variable libre $\varphi = \varphi(x) \in L$ tal que $\exists x \varphi(x) \in \Sigma$ existe $c \in C$ tal que $\varphi(c) \in \Sigma$.

Lema 3.1 *Sea L un lenguaje y C un conjunto de constantes tal que $L \cap C = \emptyset$ y $|C| = |L| + \omega$. Existe entonces un conjunto Δ de sentencias de $L \cup C$ tal que*

1. *Si Σ es un conjunto finitamente satisfacible de sentencias de L, también $\Sigma \cup \Delta$ es finitamente satisfacible.*
2. *Si $\Gamma \supseteq \Delta$ es un conjunto de sentencias de $L \cup C$ que está cerrado bajo Modus Ponens (es decir, $\psi \in \Gamma$ siempre que $\varphi \in \Gamma$ y $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$), entonces Γ tiene ejemplificaciones en C.*

Prueba. Sea $\kappa = |C| = |L| + \omega$ y sea $C = \{c_i : i < \kappa\}$. Podemos obtener una enumeración $(\varphi_i : i < \kappa)$ de las fórmulas de $L \cup C$ con una variable libre de modo que para cada $i < \kappa$, $\varphi_i = \varphi_i(x_i)$ sea una fórmula de $L \cup \{c_j : j < i\}$. (Esa enumeración se obtiene a partir de una enumeración cualquiera de longitud κ simplemente comenzando con una fórmula de L y repitiendo en cada caso el número de veces que sea preciso una fórmula hasta que la siguiente acabe siendo del lenguaje que corresponda). Definimos entonces

$$\Delta \;=\; \{\,(\exists x_i \varphi_i(x_i) \to \varphi_i(c_i)) \;:\; i < \kappa\,\}.$$

Es claro que se cumple el punto *2*. Respecto a *1*, consideremos un conjunto Σ de sentencias de L que es finitamente satisfacible. Para cada $\alpha \leq \kappa$, sea

$$\Delta_\alpha \;=\; \{\,(\exists x_i \varphi_i(x_i) \to \varphi_i(c_i)) \;:\; i < \alpha\,\}.$$

Vemos por inducción que para cada $\alpha \leq \kappa$, $\Sigma \cup \Delta_\alpha$ es finitamente satisfacible. Ello es claro para $\alpha = 0$ y, por la hipótesis inductiva, para α límite. Supongamos que $\Sigma \cup \Delta_\alpha$ es finitamente satisfacible y veamos que también lo es

$$\Sigma \cup \Delta_{\alpha+1} = \Sigma \cup \Delta_\alpha \cup \{ (\exists x_\alpha \varphi_\alpha(x_\alpha) \to \varphi_\alpha(c_\alpha)) \}.$$

Como tanto φ_α como las fórmulas de $\Sigma \cup \Delta_\alpha$ son de $L \cup \{ c_i : i < \alpha \}$, y c_α no es de ese lenguaje, lo que queremos mostrar es un caso particular del siguiente hecho de carácter general: si Γ es un conjunto satisfacible de sentencias de un tipo de semejanza L, $\varphi = \varphi(x)$ es una fórmula de L y la constante c no es de L, entonces tambien es satisfacible $\Gamma \cup \{ (\exists x \varphi(x) \to \varphi(c)) \}$. La razón es que en un modelo M de Γ siempre podemos interpretar libremente la constante c de modo que se satisfaga el condicional.

Lema 3.2 (Lema de Lindenbaum) *Si Σ es un conjunto finitamente satisfacible de sentencias de L, entonces Σ puede extenderse a un conjunto de sentencias de L que es maximal respecto a la satisfacibilidad finita.*

Prueba. Sea X la colección formada por todas las extensiones de Σ en L que son finitamente satisfacibles. X está parcialmente ordenado por inclusión y toda cadena Y en X tiene cota superior, pues $\bigcup Y \in X$. Por el Lema de Zorn, X tiene un elemento maximal, que es lo que buscamos.

Lema 3.3 *Sean Σ un conjunto de sentencias de L y $C \subseteq L$ un conjunto de constantes tales que*

1. *Σ es maximal en L respecto a satisfacibilidad finita ,*
2. *Σ tiene ejemplificaciones en C.*

Entonces existe un modelo M de tipo L tal que

3. $\Sigma = \mathrm{Th}(M)$,
4. $M = \{c^M : c \in C\}$.

Prueba. Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de los términos de L que no tienen variables. Definimos en $\mathcal{T}$ la relación $\sim$:

$$t_1 \sim t_2 \;\Leftrightarrow\; t_1 \doteq t_2 \in \Sigma.$$

Como Σ es maximal respecto a satisfacibilidad finita, si σ es consecuencia de un subconjunto finito de Σ, entonces $\sigma \in \Sigma$. De ello se sigue que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{T}$ y además que tiene las dos siguientes propiedades:

(i) Si F es un símbolo funcional n-ádico de L y para cada i $(1 \leq i \leq n)$ $t_i \sim t'_i$, entonces $Ft_1 \ldots t_n \sim Ft'_1 \ldots t'_n$.

(ii) Si P es un predicado n-ádico de L, $Pt_1 \ldots t_n \in \Sigma$ y para cada i $(1 \leq i \leq n)$ $t_i \sim t'_i$, entonces $Pt'_1 \ldots t'_n \in \Sigma$.

Construimos un modelo M de tipo L cuyo universo es el conjunto cociente

$$\mathcal{T}/\sim \;=\; \{ [t]_\sim : t \in \mathcal{T} \}.$$

La interpretación de los símbolos de L es como se indica:

(iii) Para cada constante $c \in L$, $c^M = [c]_\sim$.

(iv) Para cada símbolo funcional n-ádico $F \in L$ y cualesquiera $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$,

$$F^M([t_1]_\sim, \ldots, [t_n]_\sim) = [Ft_1 \ldots t_n]_\sim.$$

(v) Para cada predicado n-ádico $P \in L$ y cualesquiera $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$,

$$P^M = \{([t_1]_\sim, \ldots, [t_n]_\sim) : Pt_1 \ldots t_n \in \Sigma\}.$$

Ya podemos ver que se cumple la condición *4*. Sea $a \in M$ y veamos que hay $c \in C$ tal que $a = c^M$. Hay $t \in \mathcal{T}$ tal que $a = [t]_\sim$. Como $\Sigma \models \exists x\, x \doteq t$, resulta que $\exists x\, x \doteq t \in \Sigma$ y como Σ tiene ejemplificaciones en C, hay $c \in C$ tal que $c \doteq t \in \Sigma$. Pero entonces $c \sim t$ y por tanto, $a = [t]_\sim = [c]_\sim = c^M$. Ahora es fácil probar por inducción que

(vi) Para cada término $t \in \mathcal{T}$, $t^M = [t]_\sim$.

y con esto y (ii) vemos que

(vii) Para cada sentencia atómica σ de L, $M \models \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \in \Sigma$.

Sólo falta generalizar (vii) a cualquier sentencia σ de L. Ello puede hacerse por inducción. La hipótesis de que Σ es maximal respecto a satisfacibilidad finita nos sirve para los casos $\neg\varphi$ y $(\varphi \vee \psi)$. Consideremos el caso $\exists x\varphi(x)$. Por *4* tenemos que

$$M \models \exists x\varphi(x) \quad \text{si y sólo si hay} \quad c \in C \quad \text{tal que} \quad M \models \varphi(c),$$

y como Σ tiene ejemplificaciones en C,

$$\exists x\varphi(x) \in \Sigma \quad \text{si y sólo si hay} \quad c \in C \quad \text{tal que} \quad \varphi(c) \in \Sigma.$$

De estos dos hechos y de la hipótesis inductiva para $\varphi(c)$ se sigue el resultado para $\exists x\varphi(x)$.

Teorema 3.4 (Teorema de Compacidad) *Si Σ es un conjunto finitamente satisfacible de sentencias de L, entonces Σ tiene un modelo (de cardinalidad $\leq |L| + \omega$).*

Prueba. Sea $\kappa = |L| + \omega$ y sea C un conjunto de constantes tal que $C \cap L = \emptyset$ y $|C| = \kappa$. Sea Δ el conjunto de sentencias de $L \cup C$ garantizado por el Lema 3.1. Entonces $\Sigma \cup \Delta$ es finitamente satisfacible. Sea Γ la extensión de $\Sigma \cup \Delta$ que nos da el Lema 3.2. Γ es un conjunto de sentencias de $L \cup C$ que es maximal respecto a satisfacibilidad finita y que tiene ejemplificaciones en C. Sea M el modelo de tipo $L \cup C$ que el Lema 3.3 nos proporciona para Γ. Como $M = \{ c^M : c \in C \}$, la cardinalidad de M es $\leq \kappa$. Entonces $M \restriction L$ es un modelo de tipo L que satisface Σ y que tiene cardinalidad $\leq \kappa$.

Observaciones 3.5 *1. Aunque el Teorema de Compacidad se ha enunciado para conjuntos de sentencias, vale también para conjuntos de fórmulas: sustituyendo las variables libres por constantes se obtiene un conjunto de sentencias que es equivalente para satisfacibilidad.*

2. Una consecuencia del Teorema de Compacidad es que si $\Sigma \models \sigma$ entonces existe un subconjunto finito Σ_0 de Σ tal que $\Sigma_0 \models \sigma$.

3. *Otra consecuencia del Teorema de Compacidad es que si K es una clase de L–estructuras, K es elemental si y sólo si tanto K como su complemento (respecto a la clase de todas las L–estructuras) son Δ–elementales.*

Teorema 3.6 (Teorema de Löwenheim-Skolem) *Si un conjunto Σ de sentencias de L tiene un modelo infinito, entonces para cada cardinal $\kappa \geq |L| + \omega$ tiene un modelo de cardinalidad κ.*

Prueba. Sea $\kappa \geq |L| + \omega$ y sea $C = \{ c_i : i < \kappa \}$ un conjunto de constantes nuevas y distintas, es decir, $C \cap L = \emptyset$ y $c_i \neq c_j$ para $i < j < \kappa$. Sea $\Gamma = \Sigma \cup \{ \neg c_i = c_j : i < j < \kappa \}$. Como Σ tiene un modelo infinito, Γ es finitamente satisfacible. Por el Teorema 3.4, Γ tiene un modelo M de cardinalidad $\leq |L \cup C| + \omega$, es decir, $\leq \kappa$. Pero como $M \models \neg c_i = c_j$ para $i < j < \kappa$, la cardinalidad de M debe ser exactamente κ. Entonces $M \restriction L$ es un modelo de tipo L que satisface Σ y tiene cardinalidad κ.

El modelo M asociado al conjunto de sentencias Σ en la prueba del Lema 3.3 se llama en ocasiones *modelo de Henkin* de Σ. Una variante de esa construcción, los llamados *modelos de Herbrand*, son más útiles para conjuntos de sentencias sin igualdad y proporcionan una versión del Teorema de Löwenheim-Skolem para la lógica de primer orden sin igualdad. Describimos a continuación esa construcción.

Definición (Estructura de Herbrand) Sea L un lenguaje que contiene al menos una constante. Llamamos *universo de Herbrand* al conjunto $H(L)$ formado por los términos sin variables de L. Se trata de un conjunto no vacío. Se dice que una L–estructura M es una *estructura de Herbrand* o un *modelo de Herbrand* si su universo es $H(L)$ y además,

- $c^M = c$ para cada $c \in L$.
- $F^M(t_1, \ldots, t_n) = Ft_1 \ldots t_n$ para cada símbolo funcional n–ádico $F \in L$ y cualesquiera $t_1, \ldots, t_n \in H(L)$.

Lema 3.7 *Sean Σ un conjunto de sentencias de L y $C \subseteq L$ un conjunto de constantes tales que*

1. *Σ es maximal en L respecto a satisfacibilidad finita ,*
2. *Σ tiene ejemplificaciones en C.*

Entonces existe una estructura de Herbrand M de tipo L tal que

3. *Para cada sentencia σ de L sin igualdad, $\sigma \in \Sigma$ si y sólo si $M \models \sigma$.*

Prueba. A diferencia de la prueba del Lema 3.3, no necesitamos definir ahora ninguna relación de equivalencia en $H(L) = \mathcal{T}$, sino que tomamos directamente $\mathcal{T}$ como universo del modelo M. La interpretación de los símbolos de L es como se indica:

(iii) Para cada constante $c \in L$, $c^M = c$.

(iv) Para cada símbolo funcional n-ádico $F \in L$ y cualesquiera $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$,

$$F^M(t_1, \ldots, t_n) = Ft_1 \ldots t_n.$$

(v) Para cada predicado n-ádico $P \in L$ y cualesquiera $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$,

$$P^M = \{(t_1, \dots, t_n) : Pt_1 \dots t_n \in \Sigma\}.$$

Por inducción se muestra fácilmente que para cada término sin variables t, $t^M = t$ y que para cada sentencia sin igualdad σ, $\sigma \in \Sigma$ si y sólo si $M \models \sigma$.

Teorema 3.8 *Si un conjunto Σ de sentencias sin igualdad de L es consistente, entonces para cada cardinal $\kappa \geq |L| + \omega$ tiene un modelo de cardinalidad κ.*

Prueba. Sea $\kappa \geq |L| + \omega$ y sea $C = \{ c_i : i < \kappa \}$ un conjunto de constantes nuevas y distintas, es decir, $C \cap L = \emptyset$ y $c_i \neq c_j$ para $i < j < \kappa$. Por los lemas 3.1 y 3.2, Σ puede extenderse a un conjunto Γ de sentencias de $L \cup C$ que es finitamente satisfacible y tiene ejemplificaciones en C. Aplicando el Lema 3.7 a Γ obtenemos un modelo de Herbrand M cuyo universo es $H(L \cup C)$ y que satisface a todas las sentencias de Σ. Claro está, M tiene cardinalidad κ.

Observación 3.9 *Los modelos de Henkin pueden obtenerse como cocientes de los modelos de Herbrand. Ello permite obtener una prueba alternativa del Lema 3.3 a partir del Lema 3.7 y la Proposición 2.7.*

Teorema 3.10 *Sea Σ un conjunto de sentencias universales sin igualdad de un lenguaje L que contiene al menos una constante. Entonces Σ es satisfacible si y sólo si Σ tiene un modelo que es una estructura de Herbrand.*

Prueba. Sea N una L–estructura arbitraria. Existe una estructura de Herbrand M asociada de modo natural a N. Es la estructura de Herbrand M en la que para cada predicado n–ádico $R \in L$,

$$R^M = \{(t_1, \dots, t_n) \in M^n : N \models Rt_1 \dots t_n\}.$$

N induce una relación de congruencia en M, la relación definida por $t_1 \sim t_2$ si y sólo si $N \models t_1 \doteq t_2$. Se puede formar, por tanto, la estructura cociente $M/\!\sim$. Existe una inmersión natural de $M/\!\sim$ en N. Es la aplicación $f : M/\!\sim \to N$ definida por $f([t]_\sim) = t^N$. Por 2.2 sabemos que una sentencia universal verdadera en N debe ser verdadera en el cociente de la estructura de Herbrand. Por 2.6 si no tiene símbolo de igualdad será también verdadera en la estructura de Herbrand misma.

Lema 3.11 *Si Σ es un conjunto de sentencias sin cuantificadores y sin igualdad, entonces Σ es satisfacible si y sólo si Σ es proposicionalmente satisfacible.*

Prueba. Si v es una interpretación proposicional que satisface a Σ, se obtiene una estructura de Herbrand M que es un modelo de Σ interpretando cada predicado n–ádico $R \in L$ mediante la cláusula

$$R^M = \{(t_1, \dots, t_n) \in M^n : v \text{ satisface } Rt_1 \dots t_n\}.$$

Teorema 3.12 (Herbrand) *Sea $\varphi = \exists x_1 \ldots x_n \psi$ una sentencia sin igualdad de tipo L y supóngase que ψ no tiene cuantificadores. Entonces φ es válida si y sólo si existen términos de L, $t_1, \ldots, t_{m \cdot n}$ para los que la disyunción*

$$(\psi(t_1, \ldots, t_n) \vee \psi(t_{n+1}, \ldots, t_{2 \cdot n}) \vee \ldots \vee \psi(t_{(m-1) \cdot n+1}, \ldots, t_{m \cdot n}))$$

es una tautología.

Prueba. Sin perder generalidad, supondremos que el lenguaje L contiene al menos una constante. Por 3.10, en la medida en que trabajemos con sentencias universales sin igualdad, a efectos de satisfacibilidad podemos limitarnos a considerar estructuras de Herbrand. Sea M una tal estructura de Herbrand y sea $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$ una sentencia universal sin igualdad en la que $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula sin cuantificadores. Claramente, φ es verdadera en M si y sólo si para cualesquiera términos sin variables $t_1, \ldots, t_n$ de L, en M es verdadera la sentencia $\psi(t_1, \ldots, t_n)$. Por tanto, la satisfacibilidad de $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$ es equivalente a la satisfacibilidad del conjunto $\Sigma = \{\psi(t_1, \ldots, t_n) : t_1, \ldots, t_n \in H(L)\}$. Por compacidad, el conjunto Σ es satisfacible si y sólo si todos sus subconjuntos finitos son satisfacibles. Por tanto la satisfacibilidad de $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$ es equivalente a que para cada m y cualesquiera $t_1, \ldots, t_{m \cdot n} \in H(L)$ la sentencia

$$\psi(t_1, \ldots, t_n) \wedge \psi(t_{n+1}, \ldots, t_{2 \cdot n}) \wedge \ldots \wedge \psi(t_{(m-1) \cdot n+1}, \ldots, t_{m \cdot n})$$

sea satisfacible. Por 3.11, la sentencia universal $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$ es satisfacible si y sólo si para cada m y cualesquiera $t_1, \ldots, t_{m \cdot n} \in H(L)$, la sentencia

$$\psi(t_1, \ldots, t_n) \wedge \ldots \wedge \psi(t_{(m-1) \cdot n+1}, \ldots, t_{m \cdot n})$$

es proposicionalmente satisfacible. Como una sentencia es válida (una tautología) si y sólo si su negación es satisfacible (proposicionalmente satisfacible), de ello se sigue el resultado.

Observación 3.13 *El Teorema de Herbrand reduce la validez en primer orden a validez proposicional. Sus restricciones son que la sentencia debe ser existencial y que no debe contener la igualdad. El problema de que φ sea existencial no es gran impedimento si se utiliza la forma normal de Skolem para la validez. Este procedimiento proporciona una sentencia existencial que es válida si y sólo si la sentencia original lo es. Respecto al problema de la igualdad, supongamos ahora que φ contiene la igualdad y sustituyamos las apariciones del símbolo de igualdad en φ por un nuevo predicado binario E. Sea φ' la sentencia así obtenida. Se puede suponer que el lenguaje L de φ es finito, de manera que el conjunto $\Delta_{E,L}$ de la Proposición 2.7 es finito y podemos formar su conjunción δ. Obsérvese que δ es una sentencia universal, de manera que $(\delta \to \varphi')$ es equivalente a una sentencia existencial. Ahora bien, φ es válida si y sólo si $(\delta \to \varphi')$ es válida y esta última sentencia no contiene la igualdad.*

Definición (Teorías completas) Sea T una teoría de lenguaje L. T es *consistente* si es satisfacible o (por el Teorema de Compacidad) si es finitamente satisfacible. Es *completa* si para cada sentencia σ de L, o bien $\sigma \in T$ o bien $\neg\sigma \in T$. En ocasiones se dice que el conjunto de L–sentencias Σ es completo si la correspondiente teoría $\{\sigma \in L : \Sigma \models \sigma\}$ es completa.

Definición (Equivalencia elemental) Sean M y N estructuras del mismo tipo de semejanza L. Decimos que M y N son *elementalmente equivalentes* y ponemos $M \equiv N$ si satisfacen las mismas sentencias de L. Claro está, estructuras isomorfas son elementalmente equivalentes.

Observación 3.14 *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualesquiera modelos M, N de tipo L:*

1. $M \equiv N$.
2. *Para cada sentencia σ de L, si $M \models \sigma$, entonces $N \models \sigma$.*
3. $N \models \mathrm{Th}(M)$.
4. $\mathrm{Th}(M) = \mathrm{Th}(N)$.

Observación 3.15 *Para cualquier teoría consistente T son equivalentes:*

1. *T es completa.*
2. *Para cualesquiera dos modelos M, N de T, $M \equiv N$.*
3. *Existe un modelo M tal que $T = \mathrm{Th}(M)$.*

Definición (Teorías κ-categóricas) Para cada cardinal κ, sea $I(T, \kappa)$ el número de modelos no isomorfos de T en la cardinalidad κ. Decimos que T es *κ-categórica* o *categórica en κ* si $I(T, \kappa) = 1$.

Observación 3.16 *Si M es un modelo de cardinalidad κ, existe un modelo isomorfo a M cuyo universo es precisamente κ. Si $\kappa \geq |L| + \omega$, hay a lo sumo 2^κ modelos de tipo L cuyo universo es κ. Por tanto, $I(T, \kappa) \leq 2^\kappa$ para $\kappa \geq |T|$.*

Teorema 3.17 (Test de Łoš-Vaught) *Sea T una teoría de lenguaje L y supóngase que*

1. *todos los modelos de T son infinitos y*
2. *T es κ-categórica en algún $\kappa \geq |L| + \omega$.*

Entonces T es completa.

Prueba. Sean M_1, M_2 modelos de T y veamos que $M_1 \equiv M_2$. Sea $T_1 = \mathrm{Th}(M_1)$ y $T_2 = \mathrm{Th}(M_2)$. Como M_1 y M_2 son infinitos, podemos usar el Teorema de Löwenheim-Skolem para obtener modelos de cardinal κ, $N_1 \models T_1$ y $N_2 \models T_2$. Entonces N_1 y N_2 son modelos de T de cardinal κ y como T es κ-categórica, $N_1 \cong N_2$. En particular $N_1 \equiv N_2$. Pero como $M_1 \equiv N_1$ y $M_2 \equiv N_2$, podemos concluir que $M_1 \equiv M_2$.

Capítulo 4

Extensiones elementales

Definición (Subestructuras y extensiones) Sean M y N estructuras del mismo tipo de semejanza L. Decimos que M es una *subestructura* de N o que N es una *extensión* de M y escribimos $M \subseteq N$ si el universo de M es un subconjunto del universo de N y se cumplen las siguientes condiciones:

1. Para cada constante $c \in L$, $c^M = c^N$.
2. Para cada símbolo funcional n–ádico $F \in L$ y cada n–tupla $a \in M$, $F^M(a) = F^N(a)$.
3. Para cada predicado n–ádico $P \in L$ y cada n–tupla $a \in M$, $a \in P^M$ si y sólo si $a \in P^N$.

Definición (Conjunto L–cerrado) Sea M una estructura de tipo de semejanza L y sea $A \subseteq M$. Decimos que A es un conjunto *L–cerrado en M* si A es no vacío, para cada constante $c \in L$, $c^M \in A$ y para cada símbolo funcional n–ádico $F \in L$ y cada n–tupla $a \in A$, $F^M(a) \in A$. Es claro que A es el universo de una subestructura de M si y sólo si A es un conjunto L–cerrado en M.

Observación 4.1 *Si $f : M \to N$ es un homomorfismo, entonces $f(M)$ es un conjunto L–cerrado en N.*

Proposición 4.2 *Sea M una estructura de tipo L y $A \subseteq M$. Supóngase que en L hay constantes o que $A \neq \emptyset$. Entonces existe un mínimo subconjunto A' de M que extiende a A y es L–cerrado en M. Su cardinalidad es $\leq |A| + |L| + \omega$.*

Prueba. Definimos $\{A_n : n \in \omega\}$ de modo que $A_0 = A \cup \{c^M : c \in L\}$ y que

$$A_{n+1} = A_n \cup \bigcup_{m \in \omega} \{F^M(a) : a \in A_n^m,\ F \in L \ m\text{-ádico }\}.$$

Entonces ponemos $A' = \bigcup_{n \in \omega} A_n$. Por inducción se muestra que para cada $n \in \omega$, $|A_n| \leq |A| + |L| + \omega$. De ello se sigue que $|A'| \leq |A| + |L| + \omega$.

Proposición 4.3 *Sea $M \subseteq N$ y $a \in M$ una tupla.*

1. *Si $\varphi(x)$ no tiene cuantificadores, $M \models \varphi(a)$ si y sólo si $N \models \varphi(a)$.*
2. *Si $\varphi(x)$ es universal y $N \models \varphi(a)$, entonces $M \models \varphi(a)$.*
3. *Si $\varphi(x)$ es existencial y $M \models \varphi(a)$, entonces $N \models \varphi(a)$.*

Prueba. Por inducción puede mostrarse que para cada término $t(x)$ de L, $t^M(a) = t^N(a)$. Con ello se prueba también por inducción *1* . Por su parte, *2* y *3* se siguen de *1*.

Definición (Subestructuras y extensiones elementales) Sean M y N estructuras del mismo tipo de semejanza L. Decimos que M es una *subestructura elemental* de N o que N es una *extensión elemental* de M y escribimos $M \preceq N$, si $M \subseteq N$ y además para cada fórmula $\varphi(x)$ de L y cada tupla $a \in M$ se tiene que $M \models \varphi(a)$ si y sólo si $N \models \varphi(a)$.

Observación 4.4 *Si $M \preceq N$, entonces $M \equiv N$. De hecho, supuesto que $M \subseteq N$, se tiene que $M \preceq N$ si y sólo si $(M, a) \equiv (N, a)$ para cada tupla $a \in M$.*

Teorema 4.5 (Test de Tarski-Vaught) *Sea M una estructura de tipo L y $A \subseteq M$. Son entonces equivalentes:*

1. *A es el universo de una subestructura elemental de M.*
2. *Para cada tupla $a \in A^n$ y cada fórmula $\varphi(x, y) \in L_{n,1}$, si $M \models \exists y\, \varphi(a, y)$ entonces existe un $b \in A$ tal que $M \models \varphi(a, b)$.*

Prueba. *1* $\Rightarrow$ *2* es claro. Para mostrar *2* $\Rightarrow$ *1* veamos en primer lugar que A es el universo de una subestructura de M, es decir, que es un conjunto L–cerrado en M. Para ver que $A \neq \emptyset$ aplicamos *2* a la fórmula $y = y$. Como $M \models \exists y\, y = y$, debe haber $a \in A$ tal que $M \models a = a$. Sea $c \in L$. Para mostrar que $c^M \in A$, considérese la fórmula $y = c$. Por último, si $F \in L$ es n–ádico y $a_1, \ldots, a_n \in A$, se garantiza que $F^M(a_1, \ldots, a_n) \in A$ con la fórmula $y = Fx_1 \ldots x_n$. Como $M \models \exists y\, y = Fa_1 \ldots a_n$, debe haber $a \in A$ tal que $M \models a = Fa_1 \ldots a_n$, esto es, $F^M(a_1, \ldots, a_n) \in A$. Establecido que A es el universo de una subestructura N de M, veamos que $N \preceq M$, es decir que para cada fórmula $\varphi(x) \in L_n$ y cada n–tupla $a \in N$, $M \models \varphi(a)$ si y sólo si $N \models \varphi(a)$. Por la Proposición 4.3 sabemos que eso es así para φ atómica. Una inducción generaliza esto a cualquier φ. Los casos $\neg\varphi$ y $(\varphi \wedge \psi)$ no ofrecen dificultad. Consideremos el caso $\exists y\, \varphi(x, y)$. Sea $a \in N^n$ y supongamos primero que $N \models \exists y\, \varphi(a, y)$. Hay entonces $b \in N$ tal que $N \models \varphi(a, b)$. Por hipótesis inductiva, $M \models \varphi(a, b)$ y con ello $M \models \exists y\, \varphi(a, y)$. Ahora supongamos que $M \models \exists y\, \varphi(a, y)$. Por *2*, hay $b \in N$ tal que $M \models \varphi(a, b)$. Por hipótesis inductiva, $N \models \varphi(a, b)$ y con ello $N \models \exists y\, \varphi(a, y)$.

Definición (Inmersión elemental) Una *inmersión elemental* de M en N es una inmersión f de M en N tal que para cada fórmula $\varphi(x)$ de L y cada tupla a de M, $M \models \varphi(a)$ si y sólo si $N \models \varphi(f(a))$. Decimos que M es *inmersible* en N y escribimos $M \underset{\sim}{\subset} N$ si existe una inmersión de M en N. Decimos que M es *elementalmente inmersible* en N y escribimos

$M \precsim N$ si existe una inmersión elemental de M en N. Obviamente, M es inmersible en N si y sólo si M es isomorfo a una subestructura de N y M es elementalmente inmersible en N si y sólo si M es isomorfo a una subestructura elemental de N.

Lema 4.6 *Sean M, N estructuras del mismo tipo de semejanza L.*

1. *$M \subsetsim N$ si y sólo si existe $N' \supseteq M$ tal que $N' \cong N$.*
2. *$M \precsim N$ si y sólo si existe $N' \succeq M$ tal que $N' \cong N$.*

Prueba. Sea f una inmersión de M en N. Escójase un conjunto A tal que $M \cap A = \emptyset$ y $|A| = |N \setminus f(M)|$. Sea $g : A \to N \setminus f(M)$ una biyección. Es fácil definir una extensión N' de M con universo $M \cup A$ de modo que $f \cup g$ sea un isomorfismo entre N' y N. Si f es elemental, la extensión obtenida de este modo es elemental.

Definición (Diagrama y diagrama elemental) Sea M una estructura de tipo L y sea $C = \{c_a : a \in M\}$ un conjunto de constantes tal que $c_a \neq c_b$ para cualesquiera $a, b \in M$ distintos y $c_a \notin L$ para cada $a \in M$. El *diagrama* de M (relativo a C) es el conjunto $\mathrm{Diag}(M) = \mathrm{Diag}_C(M)$ formado por todas las sentencias de $L \cup C$ que son atómicas o negaciones de sentencias atómicas y que son verdaderas en $M_M = (M, (a)_{a\in M})$. El *diagrama elemental* de M (relativo a C) es el conjunto formado por todas las sentencias de $L \cup C$ que son verdaderas en M_M. El diagrama elemental de M es, por tanto, $\mathrm{Th}(M_M)$.

Proposición 4.7 *Sean M, N estructuras del mismo tipo L.*

1. *$M \subsetsim N$ si y sólo si alguna expansión de N satisface el diagrama de M.*
2. *$M \precsim N$ si y sólo si alguna expansión de N satisface el diagrama elemental de M.*

Prueba. Sea $f : M \to N$ una inmersión. Definimos una expansión N' de N a $L \cup C$ poniendo $c_a^{N'} = f(a)$ para cada $a \in M$. Utilizando la Proposición 4.3 vemos que para cada fórmula $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ sin cuantificadores de L y cada $a_1, \ldots, a_n \in M$, $\sigma(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \in \mathrm{Diag}(M)$ si y sólo si $M \models \sigma(a_1, \ldots, a_n)$ si y sólo si $N \models \sigma(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ si y sólo si $N' \models \sigma(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$. Por tanto, $N' \models \mathrm{Diag}(M)$. Es claro que si f es elemental entonces lo mismo vale para cualquier fórmula $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ de L y por tanto en ese caso N' es un modelo del diagrama elemental de M. Ahora supongamos que tenemos una expansión N' de N que satisface $\mathrm{Diag}(M)$. Definimos $f : M \to N$ por $f(a) = c_a^{N'}$ para cada $a \in M$. Es fácil ver que f es una inmersión de M en N y que si N' satisface el diagrama elemental de M, entonces f es elemental.

Proposición 4.8 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *Toda sentencia existencial verdadera en M es verdadera en N.*
2. *Toda sentencia universal verdadera en N es verdadera en M.*
3. *M es inmersible en una extensión elemental de N.*

4. N es elementalmente inmersible en una extensión de M.

Prueba. Es obvio que *1* y *2* son equivalentes. La equivalencia entre *3* y *4* se sigue del Lema 4.6. Por la Proposición 4.3 se ve que *3* y *4* implican *1* y *2*. Veamos finalmente que *1* implica *3*. Sean $C = \{c_a : a \in M\}$ y $D = \{d_a : a \in N\}$ conjuntos disjuntos de constantes para las respectivas expansiones M_M y N_N. Mostraremos que $\mathrm{Diag}_M \cup \mathrm{Th}(N_N)$ es consistente. Por la Proposición 4.7 y el Lema 4.6 ello implica que existe $N' \succeq N$ tal que $M \underset{\sim}{\subset} N'$. Por compacidad es suficiente con mostrar que para cada sentencia $\sigma \in \mathrm{Th}(M_M)$ sin cuantificadores, $\mathrm{Th}(N_N) \cup \{\sigma\}$ es consistente. Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula del lenguaje L de M y N y sean $a_1, \ldots, a_n \in M$ tales que $\sigma = \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Como $M \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, por *1* también $N \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Sean $b_1, \ldots, b_n \in N$ tales que $N \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$. Si $(N_N, b_1, \ldots, b_n)$ es la expansión de N_N en la que se interpretan las constantes $d_{a_1}, \ldots, d_{a_n}$ respectivamente como los elementos $b_1, \ldots, b_n \in N$, entonces claramente $(N_N, b_1, \ldots, b_n) \models \mathrm{Th}(N_N) \cup \{\sigma\}$.

Definición (Cadenas, cadenas elementales y uniones de cadenas) Sea α un ordinal. Una *cadena* de modelos de longitud α es una secuencia $(M_i : i < \alpha)$ de modelos del mismo tipo de semejanza tal que para cualesquiera $i < j < \alpha$, $M_i \subseteq M_j$. Es una *cadena elemental* si para cualesquiera $i < j < \alpha$, $M_i \preceq M_j$. La *unión de la cadena* $(M_i : i < \alpha)$ de modelos de tipo L es el modelo $M = \bigcup_{i<\alpha} M_i$ de tipo L cuyo universo es la unión de los universos de los miembros de la cadena y donde se interpretan los símbolos de L como se indica:

1. Si $c \in L$, entonces $c^M = c^{M_i}$ donde $i < \alpha$ es arbitrario.
2. Si $F \in L$ es n–ádico y a es una n-tupla de M, entonces $F^M(a) = F^{M_i}(a)$ donde i es cualquier ordinal $< \alpha$ que verifica $a \in M_i^n$.
3. Si $P \in L$ es un predicado, $P^M = \bigcup_{i<\alpha} P^{M_i}$.

Es inmediato que para cada $i < \alpha$, $M_i \subseteq \bigcup_{i<\alpha} M_i$.

Proposición 4.9 (Lema de la cadena de Tarski) *Si $(M_i : i < \alpha)$ es una cadena elemental, entonces para cada $i < \alpha$, $M_i \preceq \bigcup_{i<\alpha} M_i$.*

Prueba. Sea $M = \bigcup_{i<\alpha} M_i$. Vemos por inducción en φ que para cada fórmula $\varphi(x)$ de L, cada $i < \alpha$ y cada tupla $a \in M_i$, $M_i \models \varphi(a)$ si y sólo si $M \models \varphi(a)$. Como $M_i \subseteq M$, por la Proposición 4.3 sabemos que esto es así para φ atómica. Los casos $\neg\varphi$ y $(\varphi \wedge \psi)$ se siguen de la hipótesis inductiva. Consideremos el caso $\exists y\, \varphi(x, y)$. Sea $i < \alpha$ y $a \in M_i$. Supongamos que $M_i \models \exists y\, \varphi(a, y)$ y sea $b \in M_i$ tal que $M_i \models \varphi(a, b)$. Por hipótesis inductiva, $M \models \varphi(a, b)$ y con ello $M \models \exists y\, \varphi(a, y)$. Ahora supongamos que $M \models \exists y\, \varphi(a, y)$, de modo que hay $b \in M$ tal que $M \models \varphi(a, b)$. Sea j tal que $i \leq j < \alpha$ y $b \in M_j$. Por hipótesis inductiva, $M_j \models \varphi(a, b)$ y por tanto $M_j \models \exists y\, \varphi(a, y)$. Como $M_i \preceq M_j$, también $M_i \models \exists y\, \varphi(a, y)$.

Teorema 4.10 (Teorema ascendente de Löwenheim-Skolem) *Si M es una estructura infinita de tipo L, entonces para cada cardinal $\kappa \geq |M| + |L|$ existe $N \succeq M$ tal que $|N| = \kappa$.*

Prueba. Sea T el diagrama elemental de M relativo a las constantes $C = \{c_a : a \in M\}$. T es entonces una teoría de tipo $L(M) = L \cup C$ que tiene un modelo infinito. Por el Teorema de Löwenheim-Skolem T tiene un modelo en cada cardinal $\kappa \geq |L(M)| + \omega = |L| + |M|$. Sea N' un modelo de T. Por la Proposición 4.7, $M \preceq N' \upharpoonright L$ y por el Lema 4.6 existe $N \succeq M$ tal que $N \cong N' \upharpoonright L$.

Teorema 4.11 (Teorema descendente de Löwenheim-Skolem) *Si M es una estructura infinita de tipo L y $A \subseteq M$, entonces para cada cardinal k tal que $|L|+|A|+\omega \leq \kappa \leq |M|$ existe $N \preceq M$ tal que $A \subseteq N$ y $|N| = \kappa$.*

Prueba. Dada una fórmula $\varphi = \varphi(x, y) \in L_{n,1}$ y una n–tupla $a \in M$ tal que $M \models \exists y\, \varphi(a, y)$, escojamos $b_{\varphi,a} \in M$ tal que $M \models \varphi(a, b_{\varphi,a})$. Si $X \subseteq M$, pongamos

$$X' = \bigcup_{n\in\omega} \{b_{\varphi,a} \,:\, a \in X^n,\ \varphi = \varphi(x, y) \in L_{n,1}\,\}.$$

Definimos una cadena $(X_n : n \in \omega)$ de subconjuntos de M. Comenzamos eligiendo X_0 como un subconjunto de M que contiene a A y tiene cardinalidad κ y ponemos $X_{n+1} = X_n \cup (X_n)'$. Como $|X'| \leq |X| + |L| + \omega$, por inducción en n vemos que para cada $n \in \omega$, $|X_n| = \kappa$. Sea $X_\omega = \bigcup_{n\in\omega} X_n$. Entonces $|X_\omega| = \kappa$ y $(X_\omega)' \subseteq X_\omega$. El Test de Tarski-Vaught garantiza que X_ω es el universo de una subestructura elemental de M.

Teorema 4.12 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $M_1 \equiv M_2$,
2. *Hay N tal que $M_1 \precsim N$ y $M_2 \precsim N$,*
3. *Hay N tal que $M_1 \preceq N$ y $M_2 \precsim N$,*
4. *Hay N_1, N_2 tales que $M_1 \preceq N_1$, $M_2 \preceq N_2$ y $N_1 \cong N_2$.*

Prueba. *1* $\Rightarrow$ *2*. Supongamos que $M_1 \equiv M_2$. Sea D_1 el diagrama elemental de M_1 respecto a las constantes $C_1 = \{c_a : a \in M_1\}$ y sea D_2 el diagrama elemental de M_2 respecto a las constantes $C_2 = \{c'_a : a \in M_2\}$ elegidas de modo que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Por la Proposición 4.7 basta ver que $D_1 \cup D_2$ es satisfacible. Por el Teorema de Compacidad, para ello es suficiente con mostrar que $D_1 \cup D_2$ es finitamente satisfacible. Como D_1 y D_2 están cerrados bajo conjunciones basta incluso con mostrar que si $\sigma_1 \in D_1$ y $\sigma_2 \in D_2$, entonces $(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ es satisfacible. Existen fórmulas $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$ y $\varphi_2(x_1 \ldots, x_n)$ de L y secuencias $a_1, \ldots, a_n \in M_1$ y $b_1, \ldots, b_n \in M_2$ tales que $\sigma_1 = \varphi_1(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$ y $\sigma_2 = \varphi_2(c_{b_1}, \ldots, c_{b_n})$. Claro está, $M_1 \models \varphi_1(a_1, \ldots, a_n)$ y $M_2 \models \varphi_2(b_1, \ldots, b_n)$. Como $M_1 \equiv M_2$, tenemos entonces que $M_1 \models \exists x_1 \ldots x_n\, \varphi_2(x_1, \ldots, x_n)$, y por ello hay $d_1, \ldots, d_n \in M_1$ tales que $M_1 \models \varphi_2(d_1, \ldots, d_n)$. Como $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, podemos definir una expansión M_1' de M_1 interpretando las constantes $c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}$ como los elementos $a_1, \ldots, a_n$ y las constantes ${c'}_{b_1}, \ldots, {c'}_{b_n}$ como los elementos $d_1, \ldots, d_n$. Entonces $M_1' \models (\sigma_1 \wedge \sigma_2)$.
2 $\Rightarrow$ *3* y *3* $\Rightarrow$ *4* se siguen del Lema 4.6.
4 $\Rightarrow$ *1* es claro, pues si $M \preceq N$, entonces $M \equiv N$.

Corolario 4.13 *Si M es una estructura finita, entonces $M \equiv N$ si y sólo si $M \cong N$.*

Prueba. Sea $M \equiv N$ y M finita. Por el lema previo existen $M' \succeq M$ y $N' \succeq N$ tales que $M' \cong N'$. Sea $n = |M|$. Existe una sentencia σ_n en el tipo de semejanza vacío cuyos modelos de tipo L son las estructuras de tipo L de cardinalidad n. Como $M' \models \sigma_n$, resulta que M' es también una estructura finita, de cardinalidad n. Siendo M y M' estructuras finitas del mismo tamaño con $M \subseteq M'$, debe ser $M = M'$. Como $M' \cong N'$ tenemos que también $N' \models \sigma_n$ y $N \models \sigma_n$. Por tanto también N y N' son estructuras de tamaño n. Por la misma razón que antes, deber ser $N = N'$. En definitiva, $M \cong N$.

Capítulo 5

Teoremas de conservación e invariancia

Definición Sea Δ un conjunto de sentencias de L y sean M y N dos L-estructuras. Con la notación $M \Rrightarrow_\Delta M$ indicamos que $N \models \delta$ para cada $\delta \in \Delta$ tal que $M \models \delta$. Si $\Delta(x)$ es un conjunto de fórmulas de L, y $a \in M$, $b \in N$ son tuplas de la correspondiente longitud, con $(M, a) \Rrightarrow_\Delta (N, b)$ indicamos que $N \models \delta(b)$ para cada $\delta(x) \in \Delta(x)$ tal que $M \models \delta(a)$. Para los casos de que Δ sea el conjunto de las sentencias universales, existenciales o universales-existenciales de L escribimos $M \Rrightarrow_\forall M$, $M \Rrightarrow_\exists M$ y $M \Rrightarrow_{\forall\exists} M$ respectivamente. Lo mismo para conjuntos de fórmulas.

Lema 5.1 *Sea T una teoría de lenguaje L y sea Σ un conjunto de sentencias de L consistente con T. Sea además Δ un conjunto de sentencias de L cerrado bajo disyunción. Supóngase que siempre que $M, N \models T$ y $M \Rrightarrow_\Delta N$ y $M \models \Sigma$ entonces $N \models \Sigma$. Entonces existe un subconjunto Δ_Σ de Δ que es equivalente a Σ para modelos de T, es decir*

$$\mathrm{Mod}_L(T \cup \Delta_\Sigma) = \mathrm{Mod}_L(T \cup \Sigma).$$

Prueba. Sea $\Delta_\Sigma = \{\delta \in \Delta : T \cup \Sigma \models \delta\}$. Basta mostrar que $T \cup \Delta_\Sigma \models \sigma$ para cada $\sigma \in \Sigma$. Sea $N \models T \cup \Delta_\Sigma$ y pongamos

$$\Gamma = \{\neg\delta : \delta \in \Delta,\ N \models \neg\delta\}.$$

Mostraremos que $N \models \Sigma$. necesitamos mostrar primero que $T \cup \Sigma \cup \Gamma$ es consistente. Si $\Gamma = \emptyset$ ello es claro por hipótesis. Y si $\Gamma \neq \emptyset$ y $T \cup \Sigma \cup \Gamma$ es inconsistente, para algún $n \geq 1$ existen $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta$ tales que $N \models (\neg\delta_1 \wedge \ldots \wedge \neg\delta_n)$ y $T \cup \Sigma \models \delta_1 \vee \ldots \vee \delta_n$. Entonces la disyunción $(\delta_1 \vee \ldots \vee \delta_n)$ pertenece a Δ y pertenece también a Δ_Σ, en cuyo caso hay i tal que $N \models \delta_i$, pero eso es imposible.

Sea M un modelo de $T \cup \Sigma \cup \Gamma$. Como $M \models \Gamma$, tenemos que $M \Rrightarrow_\Delta N$. Y como $M \models T \cup \Sigma$, por la hipótesis del lema, concluimos que $N \models \Sigma$.

Proposición 5.2 1. *Sea T una teoría consistente de lenguaje L y Δ un conjunto de sentencias de L cerrado bajo disyunción. Supóngase que siempre que $M \Rrightarrow_\Delta N$ y $M \models T$, también $N \models T$. Entonces T es axiomatizable mediante sentencias de Δ.*

2. *Sea T una teoría de lenguaje L y $\Delta = \Delta(x)$ un conjunto de fórmulas de L cerrado bajo disyunción y conjunción. Supóngase que $\varphi = \varphi(x) \in L$ es consistente con T y que siempre que M, N son modelos de T y $a \in M$ y $b \in N$ son tuplas tales que*

   a) *$M \models \varphi(a)$ y*

   b) *$(M, a) \Rrightarrow_\Delta (N, b)$,*

   entonces $N \models \varphi(b)$. Bajo estas condiciones existe una fórmula $\delta(x) \in \Delta$ tal que $T \vdash \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \delta(x))$.

Prueba. *1* se obtiene aplicando el Lema 5.1 a la teoría trivial (sin axiomas) y al conjunto de sentencias T. Para *2* aplicamos el mismo lema sustituyendo las variables x por nuevas constantes c y argumentando en $L \cup \{c\}$ con $\Sigma = \{\varphi(c)\}$. Esto da la equivalencia módulo T de $\varphi(x)$ con un subconjunto de $\Delta(x)$. Por compacidad y por estar $\Delta(x)$ cerrada bajo conjunción este conjunto puede reemplazarse por una fórmula de $\Delta(x)$. Para dar cuenta del caso particular en el que ese conjunto equivalente a $\varphi(x)$ sea el conjunto vacío, hay que suponer adicionalmente que $\Delta(x)$ contiene alguna fórmula válida en todos los modelos de T o bien entender que $\Delta(x)$ contiene también a la conjunción del conjunto vacío, que es una fórmula válida.

Definición Una teoría T *se conserva bajo subestructuras* si siempre que $M \models T$ y $N \subseteq M$, también $N \models T$. Una fórmula $\varphi(x)$ *se conserva bajo subestructuras de modelos de* T si siempre que $M, N \models T$, $N \subseteq M$, $a \in N$ y $M \models \varphi(a)$, entonces $N \models \varphi(a)$. Análogamente se define la conservación de teorías y fórmulas bajo extensiones.

Proposición 5.3 1. *Una teoría T se conserva bajo subestructuras, si y sólo si T es axiomatizable mediante sentencias universales.*

2. *Una fórmula $\varphi(x)$ se conserva bajo subestructuras de modelos de T si y sólo si existe una fórmula universal $\psi(x)$ tal que $T \models \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$.*

Prueba. *1.* Sea L el lenguaje de T. De acuerdo con la Proposición 5.2 basta mostrar que si $M \models T$ y toda sentencia universal verdadera en M es verdadera en N, también $N \models T$. Pero por la Proposición 4.8 estas hipótesis implican que N es inmersible en una extensión elemental de M y por tanto que $M \models T$. La prueba de *2* es análoga.

Observación 5.4 *De la proposición anterior se sigue inmediatamente que una fórmula se conserva bajo extensiones de modelos de una teoría T, si y sólo si es en T equivalente a una fórmula existencial. También es cierto que una teoría se conserva bajo extensiones si y sólo si es axiomatizable mediante sentencias existenciales. La prueba es análoga a la de la proposición previa.*

Definición Se dice que una teoría T *se conserva bajo uniones de cadenas* si siempre que $(M_i : i < \alpha)$ es una cadena de modelos y $M_i \models T$ para cada $i < \alpha$, entonces también $\bigcup_{i<\alpha} M_i \models T$. Las teorías que se conservan bajo uniones de cadenas se llaman también *teorías inductivas*. Se dice que una fórmula $\varphi(x)$ se conserva bajo uniones de cadenas de modelos de T si siempre que $(M_i : i < \alpha)$ es una cadena de modelos de T cuya unión $N = \bigcup_{i<\alpha} M_i$ es también un modelo de T y $a \in M_0$ verifica $M_i \models \varphi(a)$ para cada $i < \alpha$, entonces también $M \models \varphi(a)$.

Proposición 5.5 *1. Una teoría T se conserva bajo uniones de cadenas si y sólo si es axiomatizable mediante sentencias $\forall\exists$.*

2. Una fórmula $\varphi(x)$ se conserva bajo uniones de cadenas de modelos de T si y sólo si hay una fórmula $\psi(x) \in L$ que es $\forall\exists$ y verifica $T \vdash \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$.

Prueba. En ambos casos una dirección es clara pues se comprueba fácilmente que las sentencias y las fórmulas $\forall\exists$ se conservan bajo uniones de cadenas. Usamos la Proposición 5.2 y nos limitamos a justificar *1* pues *2* se prueba de modo similar. Sea $M \models T$ y supongamos que $M \Rrightarrow_{\forall\exists} N$, es decir, que todas las sentencias $\forall\exists$ verdaderas en M son también verdaderas en N. Mostraremos que $N \models T$. Para obtener ese resultado es suficiente con mostrar que existen M', N' tales que $N \subseteq M' \subseteq N'$, $M \equiv M'$ y $N \preceq N'$. La razón es que de nuevo toda sentencia $\forall\exists$ verdadera en M' es verdadera en N' de modo que podemos iterar la construcción obteniendo cadenas $(M_i : 0 < i < \omega)$ y $(N_i : i < \omega)$ con $M_1 \equiv M$, $N_0 = N$ y tales que

1. $N_i \subseteq M_{i+1} \subseteq N_{i+1}$
2. $M_i \equiv M_{i+1}$
3. $N_i \preceq N_{i+1}$.

Si $M_\omega = \bigcup_{0<i<\omega} M_i$ resulta entonces que también $M_\omega = \bigcup_{i<\omega} N_i$. Como T se conserva bajo uniones de cadenas y cada M_i es modelo de T tenemos que $M_\omega \models T$. Entonces también $N \models T$, pues $N \preceq M_\omega$ y la cadena $(N_i : i < \omega)$ es elemental. Así pues, todo lo que hay que hacer es probar que existen tales M' y N'. Para obtener M' observamos que

$$\Sigma = \mathrm{Th}(M) \cup \{\sigma \in \mathrm{Th}(N_N) : \sigma \text{ es universal } \}$$

es consistente. En caso contrario, por compacidad, existiría una fórmula sin cuantificadores $\varphi(x, y)$ del lenguaje L de M y N y una tupla $a \in N$ tales que $N \models \forall y\varphi(a, y)$ pero $\mathrm{Th}(M) \models \exists y\neg\varphi(a, y)$ y con ello $\mathrm{Th}(M) \models \forall x\exists y\neg\varphi(x, y)$, lo cual contradice la hipótesis de que $M \Rrightarrow_{\forall\exists} N$. Por la Proposición 4.7 vemos que la consistencia de Σ garantiza la existencia de M' tal que $M \equiv M'$, $N \subseteq M'$ y $N_N \Rrightarrow_{\forall} M'_N$. Por la Proposición 4.8 existe una extensión N'_N de M'_N en la que N_N es elementalmente inmersible. Obviamente esta inmersión elemental debe ser la identidad en N y así $N \preceq N'$.

Observación 5.6 *De la prueba de Proposición 5.5 se sigue que si una teoría se conserva bajo cadenas de longitud ω, entonces se conserva bajo cadenas arbitrarias. Lo mismo ocurre para fórmulas.*

Definición Una teoría T *se conserva bajo homomorfismos* si siempre que $f : M \to N$ es un homomorfismo exhaustivo y $M \models T$ entonces $N \models T$. Una fórmula $\varphi(x)$ se conserva bajo homomorfismos entre modelos de una teoría T si siempre que $f : M \to N$ es un homomorfismo exhaustivo entre modelos M, N de T y $a \in M$ es una tupla tal que $M \models \varphi(a)$ entonces $N \models \varphi(f(a))$.

Lema 5.7 *Si todas las sentencias positivas verdaderas en M son verdaderas en N, entonces existen extensiones elementales M' de M y N' de N tales que N' es imagen homomorfa de M'.*

Prueba. Sea P el conjunto de todas las sentencias positivas. Vamos a construir dos cadenas elementales $(M_i : i < \omega)$ y $(N_i : i < \omega)$ comenzando con $M = M_0$ y $N = N_0$ así como una cadena de aplicaciones $(f_i : i < \omega)$ de manera que para cada $i < \omega$, $f_{2i} : M_i \to N_{i+1}$ sea un homomorfismo (no necesariamente exhaustivo) y f_{2i+1} sea una aplicación exhaustiva entre un subconjunto A_i de M_{i+1} y N_{i+1} tal que

$$(M_{i+1}, a)_{a\in A_i} \Rrightarrow_P (N_{i+1}, f_{2i+1}(a))_{a\in A_i}.$$

Una vez efectuada esta construcción, ponemos

$$M' = \bigcup_{i<\omega} M_i, \;\; N' = \bigcup_{i<\omega} N_i \;\text{ y }\; f = \bigcup_{i<\omega} f_i.$$

Es claro que M' es una extensión elemental de M, que N' es una extensión elemental de N y que $f : M' \to N'$ es exhaustiva. También se cumple que $(M', a)_{a\in M'} \Rrightarrow_P (N', f(a))_{a\in M'}$, lo cual implica que f es un homomorfismo. Por tanto, todo lo que hay que hacer es mostrar la existencia de estas cadenas.

Tenemos que $M \Rrightarrow_P N$. Introducimos conjuntos disjuntos de constantes $C = \{c_a : a \in M\}$ y $D = \{d_a : a \in N\}$ para formar las expansiones $(M, a)_{a\in M}$ y $(N, a)_{a\in N}$. En este lenguaje la unión del diagrama elemental de N con el diagrama positivo de M (el conjunto de sentencias positivas de $L(M) = L \cup C$ verdaderas en $(M, a)_{a\in M}$) es consistente. Por tanto existe una extensión elemental N_1 de N y una familia $(b_a : a \in M)$ en N_1 tal que $(N_1, b_a)_{a\in M}$ satisface el diagrama positivo de M (interpretando c_a como b_a). Es claro que la aplicación f_0 definida por $f_0(a) = b_a$ es un homomorfismo de M_0 en N_1, aunque puede no ser exhaustivo.

El siguiente paso es la construcción de M_1 y f_1. Sea $M_0' = (M_0, a)_{a\in M_0}$ y $N_1' = (N_1, f_0(a))_{a\in M_0}$, en el lenguaje $L \cup C$. Tenemos que $M_0' \Rrightarrow_P N_1'$. Introducimos ahora un conjunto de constantes $E = \{e_a : a \in N_1\}$ y consideramos la unión del diagrama elemental de M_0' (en $L \cup C$) con el conjunto de sentencias $\neg\sigma$ de $L \cup C \cup E$ tales que σ es una sentencia positiva y $(N_1', a)_{a\in N_1} \models \neg\sigma$ (interpretando e_a como a). Salvo equivalencia lógica, el segundo conjunto está cerrado bajo conjunción, de manera que para probar la consistencia de la unión basta establecer que para cada tal σ, $\neg\sigma$ es consistente con el diagrama elemental de M_0'. Sea $\sigma = \varphi(e_a)$, donde $a = a_1, \ldots, a_n$, $e_a = e_{a_1}, \ldots, e_{a_n}$ y $\varphi(x)$ es de $L \cup C$. Si $\neg\sigma$ no fuera consistente con el diagrama elemental la sentencia positiva $\forall x\varphi(x)$ sería verdadera en M_0' y por tanto en N_1', lo cual no es cierto. Esto establece la consistencia, y la consistencia garantiza la existencia de una extensión elemental M_1' de M_0' que tiene un subconjunto $A_0 \supseteq M_0$ (formado por la unión de M_0 con las interpretaciones de las constantes e_a) en el que está definida una aplicación exhaustiva $f_1 : A_0 \to N_1$ (la unión de f_0 con la aplicación que asigna a la interpretación de e_a el elemento a) tal que $(M_1', a)_{a\in A_0} \Rrightarrow_P (N_1', f_1(a))_{a\in A_0}$. El modelo M_1 es la restricción de M_1' al lenguaje L. Como de nuevo $(M_1, a)_{a\in A_0} \Rrightarrow_P (N_1, f_1(a))_{a\in A_0}$, esta construcción se puede prolongar proporcionando la cadena indicada.

Proposición 5.8 *1. Una teoría T se conserva bajo homomorfismos si y sólo si tiene un conjunto de axiomas positivos.*

2. *Una fórmula $\varphi(x)$ se conserva bajo homomorfismos entre modelos de T si y sólo si existe una fórmula positiva $\psi(x)$ tal que $T \vdash \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$.*

Prueba. Una dirección se sigue del Lema 2.1. El resto se obtiene de la Proposición 5.2 y del Lema 5.7 dado que las fórmulas positivas están cerradas bajo conjunción y disyunción.

Definición Una teoría T *es invariante bajo cocientes* si siempre que E es una congruencia en M, entonces $M \models T$ si y sólo si $M/E \models T$. Una fórmula $\varphi(x)$ es invariante bajo cocientes entre modelos de una teoría T si siempre que $M \models T$, E es una congruencia en M y $M/E \models T$ entonces para cada tupla $a \in M$, $M \models \varphi(a)$ si y sólo si $M/E \models \varphi([a]_E)$.

Lema 5.9 *Supóngase que M y N satisfacen las mismas sentencias sin igualdad. Entonces existen extensiones elementales M' de M y N' de N así como congruencias E en M' y F en N' tales que $M'/E \cong N'/F$.*

Prueba. Indicamos con $M \equiv^- N$ que M y N satisfacen las mismas sentencias sin igualdad. Observemos que si $M \equiv^- N$ y $(a_i : i \in I)$ es una secuencia de elementos de M, entonces existe una extensión elemental N' de N y una secuencia $(b_i : i \in I)$ de elementos de N' tal que $(M, a_i)_{i \in I} \equiv^- (N', b_i)_{i \in I}$. Para garantizarlo se introducen conjuntos disjuntos de constantes $C = \{c_a : a \in N\}$ y $D = \{d_i : i \in I\}$ y se muestra la consistencia del diagrama elemental de N en $L \cup C$ junto con el conjunto de las sentencias sin igualdad de $L \cup D$ que son verdaderas en $(M, a_i)_{i \in I}$. Aplicando esta observación podemos construir cadenas elementales $(M_i : i \in I)$ y $(N_i : i \in I)$ y cadenas de secuencias $((a^i_j : j \in I_i) : i < \omega)$ y $((b^i_j : j \in I_i) : i < \omega)$ tales que

1. $M_0 = M$ y $N_0 = N$.
2. $(a^i_j : j \in I_i)$ es una secuencia de elementos de M_i, $(b^i_j : j \in I_i)$ es una secuencia de elementos de N_i y $(M_i, a^i_j)_{j \in I_i} \equiv^- (N_i, b^i_j)_{j \in I_i}$.
3. $M_i \subseteq \{a^{i+1}_j : j \in I_{i+1}\}$ y $N_i \subseteq \{b^i_j : j \in I_i\}$.

Sea $M' = \bigcup_{i<\omega} M_i$, sea $N' = \bigcup_{i<\omega} N_i$ y sean $(a_i : i \in I)$ y $(b_i : i \in I)$ las uniones de las respectivas cadenas de secuencias. Se trata de correspondientes enumeraciones de M' y N' y verifican

$$(M', a_i)_{i \in I} \equiv^- (N', b_i)_{i \in I}.$$

Definimos la relación E en M' estipulando que $E(a, b)$ si a y b satisfacen las mismas sentencias atómicas sin igualdad de $(M', a_i)_{i \in I}$. Análogamente se define F en N'. Es fácil verificar que se trata de respectivas relaciones de congruencia. Se puede definir una aplicación $f : M'/E \to N'/F$ poniendo $f([a_i]_E) = [b_i]_F$ y se puede comprobar que es un isomorfismo.

Proposición 5.10 *1. Una teoría T es invariante bajo cocientes si y sólo si tiene un conjunto de axiomas en los que no aparece el símbolo de igualdad.*

2. *Una fórmula $\varphi(x)$ es invariante bajo cocientes entre modelos de T si y sólo si existe una fórmula sin igualdad $\psi(x)$ tal que $T \vdash \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$.*

Prueba. Una dirección se sigue del Corolario 2.6. Lo demás se debe a la Proposición 5.2 y al Lema 5.9.

Capítulo 6

Modelo–Completud

Definición (Modelo-Completud) Una teoría T es *modelo completa* si para cualesquiera modelos $M, N \models T$ tales que $M \subseteq N$ se tiene $M \preceq N$. Obviamente ello implica que toda inmersión entre modelos de T es elemental.

Observación 6.1 *Como las teorías modelo-completas se conservan bajo uniones de cadenas, por la Proposición 5.5 toda teoría modelo-completa es axiomatizable mediante sentencias* $\forall\exists$.

Proposición 6.2 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es modelo-completa.*
2. *En T toda fórmula es equivalente a una fórmula existencial (universal).*
3. *Para cada $M \models T$, $T \cup \mathrm{Diag}(M)$ es completo.*

Prueba. *1* $\Rightarrow$ *2*. Sea $\varphi = \varphi(x)$ una fórmula del lenguaje L de T y veamos que φ es equivalente en T a una fórmula existencial. Aplicando este resultado a $\neg\varphi$ se ve que φ también es equivalente a una fórmula universal. Por la Proposición 5.2 vemos que tenemos que mostrar que si M, N son modelos de T y a, b son tuplas en M y N tales que toda fórmula existencial satisfecha por a en M es satisfecha por b en N y además $M \models \varphi(a)$ entonces $N \models \varphi(b)$. Por la Proposición 4.8 existe una extensión elemental (N', b) de (N, b) en la que (M, a) es inmersible. Por *1* esta inmersión es elemental. Por tanto $N \models \varphi(b)$.
2 $\Rightarrow$ *3*. Sea $M \models T$, sea L el lenguaje de T y sea σ una sentencia de $L(M)$. Hay entonces una fórmula $\varphi(x)$ de L y una tupla $a \in M$ tal que $\sigma = \varphi(a)$ (identificando los elementos de a con las constantes que los denotan). Por *2* sabemos que hay fórmulas sin cuantificadores $\psi_1(x, y)$ y $\psi_2(x, z)$ tales que $T \models \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \exists y\psi_1(x, y))$ y $T \models \forall x(\neg\varphi(x) \leftrightarrow \exists z\psi_2(x, z))$. Si existe $b \in M$ tal que $M \models \psi_1(a, b)$ entonces claramente $T \cup \mathrm{Diag}(M) \vdash \exists y\psi_1(a, y)$ y así $T \cup \mathrm{Diag}(M) \vdash \sigma$. Y si no hay tal tupla $b \in M$, como $M \models T$ debe haber una tupla $c \in M$ tal que $M \models \psi_2(a, c)$, en cuyo caso $T \cup \mathrm{Diag}(M) \vdash \exists z\psi_2(a, z)$ y por tanto $T \cup \mathrm{Diag}(M) \vdash \neg\sigma$.
3 $\Rightarrow$ *1*. Sean M, N modelos de T tales que $M \subseteq N$. Mostramos que $M \preceq N$ mediante el Test de Tarski-Vaught (Teorema 4.5). Sea $\varphi(x, y) \in L_{n,1}$ y sea $a \in M$ una n–tupla tal

que $N \models \exists y \varphi(a, y)$. Como $T \cup \mathrm{Diag}(M)$ es completo y $N_M \models T \cup \mathrm{Diag}(M)$, resulta que $T \cup \mathrm{Diag}(M) \vdash \exists y \varphi(a, y)$. Como también $M_M \models T \cup \mathrm{Diag}(M)$, tenemos que $M \models \exists y \varphi(a, y)$ de modo que hay un $b \in M$ tal que $M \models \varphi(a, b)$. De nuevo por completud de $T \cup \mathrm{Diag}(M)$ se concluye que $N \models \varphi(a, b)$.

Definición (Eliminación de cuantificadores) Sea T una teoría de lenguaje L. T tiene *eliminación de cuantificadores* si para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L$ existe una fórmula sin cuantificadores $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ tal que

$$T \models \forall x_1 \ldots x_n (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)).$$

Observación 6.3 *Si T tiene eliminación de cuantificadores, por la Proposición 6.2, T es modelo-completa.*

Definición (Modelos existencialmente cerrados) Sea $M \subseteq N$. Se dice M está *existencialmente cerrado en* N si para cada fórmula existencial $\varphi(x)$ y cada tupla $a \in M$, si $N \models \varphi(a)$, entonces también $M \models \varphi(a)$. Escribimos $M \preceq_1 N$ para indicar que M está existencialmente cerrado en N. Por otro lado se dice que una inmersión $f : M \to N$ entre estructuras arbitrarias M, N es existencialmente cerrada si para cada fórmula existencial $\varphi(x)$ y cada tupla $a \in M$, si $N \models \varphi(f(a))$, entonces $M \models \varphi(a)$. Se dice que M *está existencialmente cerrado en una teoría* T si M está existencialmente cerrado en todo modelo N de T tal que $M \subseteq N$. Equivalentemente, todas las inmersiones de M en modelos de T son existencialmente cerradas.

Observación 6.4 *Las siguientes condiciones son equivalentes si $M \subseteq N$.*

1. *$M \preceq_1 N$.*
2. *Existe $M' \succeq M$ y una inmersión $f : N \to M'$ que es la identidad en M.*

Y en general si $f : M \to N$ es una inmersión son equivalentes:

1. *f es existencialmente cerrada.*
2. *Existe $M' \succeq M$ y una inmersión $g : N \to M'$ tales que $g \supseteq f^{-1}$.*

Proposición 6.5 (Test de Robinson) *T es modelo-completa si y sólo si todo modelo de T es existencialmente cerrado en T.*

Prueba. Es inmediato que la modelo-completud de T implica que todos los modelos de T son existencialmente cerrados en T. Mostramos la otra dirección. Sean M, N modelos de T tales que $M \subseteq N$ y veamos que $M \preceq N$. Por la hipótesis $M \preceq_1 N$ y por la observación previa existe $M' \succeq M$ y una inmersión $f : N \to M'$ que es la identidad en M. La inmersión f es existencialmente cerrada y de nuevo por la observación anterior podemos obtener $N' \succeq N$ y una inmersión $g : M' \to N'$ tal que $g \supseteq f^{-1}$. Obviamente este procedimiento es iterable y produce una cadena elemental $(M_i : i < \omega)$, con $M_0 = M$, una cadena elemental $(N_i : i < \omega)$ con $N_0 = N$ y dos familia de inmersiones $(f_i : i < \omega)$ y $(g_i : i < \omega)$ tales que $f_i : M_i \to N_i$, f_0 es la identidad en M, $g_i : N_i \to M_{i+1}$ y $f_i^{-1} \subseteq g_i \subseteq f_{i+1}^{-1}$. Sea

$M_\omega = \bigcup_{i<\omega} M_i$, sea $N_\omega = \bigcup_{i<\omega} N_i$ y sea $f = \bigcup_{i<\omega} f_i$. Obviamente $M \preceq M_\omega$, $N \preceq N_\omega$ y f es un isomorfismo entre M_ω y N_ω que extiende a la identidad en M. De ello se sigue que $M \preceq N$.

Lema 6.6 *Si T se conserva bajo uniones de cadenas, todo modelo de T de cardinal $\kappa \geq |T|$ es extensible a un modelo de T de cardinal κ que está existencialmente cerrado en T.*

Prueba. Sea M un modelo de T de cardinal $\kappa \geq |T|$. Vemos primero que existe un modelo M' de T de cardinal κ tal que $M' \supseteq M$ y para fórmula existencial $\varphi(x) \in L$ y cada tupla $a \in M$, si existe un modelo M_1 de T tal que $M' \subseteq M_1$ y $M_1 \models \varphi(a)$, entonces $M' \models \varphi(a)$. Sea L el lenguaje de T y sea $(\varphi_i : i < \kappa)$ una enumeración de todas las sentencias existenciales de $L(M)$. Construimos una cadena $(M_i : i < \kappa)$ de modelos $M_i \models T$ de cardinal κ de modo que $M_0 = M$, $M_i = \bigcup_{j<i} M_j$ si $i < \kappa$ es límite y de modo que si φ_i es verdadera en alguna extensión de M_i que sea modelo de T entonces M_{i+1} es una tal extensión de cardinal κ. Este último punto puede asegurarse siempre gracias al teorema descendente de Löwenheim-Skolem. Finalmente se pone $M' = \bigcup_{i<\kappa} M_i$.

Establecida por tanto la existencia de M' vemos que podemos iterar el proceso y obtener ahora un correspondiente $M'' \supseteq M'$. De este modo se puede construir una cadena $(N_i : i < \omega)$ de mode−los N_i de T de cardinal κ con $N_0 = M$ y de modo que toda sentencia existencial de $L(N_i)$ que sea verdadera en algún modelo de T que extienda a N_{i+1} sea también verdadera en $(N_{i+1}a)_{a\in N_i}$. Sea $N = \bigcup_{i<\omega} N_i$. N es un modelo de cardinal κ y como T se conserva bajo uniones de cadenas, $N \models T$. Es fácil comprobar que N está existencialmente cerrado en T.

Observación 6.7 *Hay dos simplificaciones adicionales que pueden hacerse en el test de Robinson. Para establecer que T es modelo-completa este test dice que lo que hay que hacer es mostrar que si $M \subseteq N$ son modelos de T, φ es una fórmula existencial $a \in M$ y $N \models \varphi(a)$, entonces $M \models \varphi(a)$. Una primera simplificación consiste en que basta con considerar fórmulas primitivas φ, es decir, fórmulas de la forma $\exists y \psi(x, y)$ donde ψ es una conjunción de fórmulas atómicas y negaciones de fórmulas atómicas. La segunda simplificación se aplica cuando todos los modelos de T son infinitos. Consiste en tener en cuenta sólo modelos de un cardinal fijo dado $\kappa \geq |T|$.*

Proposición 6.8 (Lindström, 1964) *Sea T una teoría todos cuyos modelos son infinitos y que es κ–categórica para algún $\kappa \geq |T|$. Si T se conserva bajo uniones de cadenas, entonces T es modelo-completa.*

Prueba. De acuerdo con el test de Robinson y la observación previa basta con mostrar que todo modelo de T de cardinalidad κ es existencialmente cerrado en T. Como T es κ–categórica para ello es suficiente con garantizar que T tiene un modelo de cardinalidad κ que es existencialmente cerrado en T. Pero esto es una consecuencia del Lema 6.6 dado que T se conserva bajo uniones de cadenas.

Definición (AP y JEP) T tiene la *propiedad de amalgamación* (abreviado la AP) si para cualesquiera modelos M, M_1, M_2 de T y cualesquiera inmersiones $f_1 : M \to M_1$ y

$f_2 : M \to M_2$ existe un modelo N de T e inmersiones $g_1 : M_1 \to N$ y $g_2 : M_2 \to N$ tales que $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$. De hecho basta establecer esta condición para el caso en que f_1 y f_2 sean la identidad. T tiene la *propiedad de la inmersión conjunta* (abreviado la JEP) si cualesquiera dos modelos de T son inmersibles en un tercer modelo de T.

Proposición 6.9 *1. Si hay un modelo de T que es inmersible en todos los modelos de T y T tiene la AP, entonces T tiene la JEP.*

2. Si T es modelo-completa T tiene la AP.

3. Si T es completa T tiene la JEP.

4. Sea T modelo-completa. Entonces T es completa si y sólo si T tiene la JEP.

5. Si T es modelo completa y tiene un modelo que es inmersible en todos los modelos de T entonces T es completa.

Prueba. *1* es claro y *5* se sigue de *1*, *2* y *4*. Para establecer *2* supongamos que T es modelo completa y que $f_1 : M \to M_1$ y $f_2 : M \to M_2$ son inmersiones entre modelos de T. Por modelo-completud estas inmersiones son elementales de manera que $(M_1 f_1(a))_{a \in M} \equiv (M_2 f_2(a))_{a \in M}$. Ello implica la existencia de $N \succeq M_1$ y una inmersión elemental $g_2 : (M_2, f_2(a))_{a \in M} \to (N, f_1(a))_{a \in M}$. Si $g_1 : M_1 \to N$ es la identidad resulta entonces que $g_2 \circ f_2 = g_1 \circ f_1$. La prueba de *3* es análoga: si M_1, M_2 son modelos de la teoría completa T entonces $M_1 \equiv M_2$ y por ello existe $N \succeq M_1$ tal que $M_2 \precsim N$. Una dirección de *4* se sigue de *3*. Para la otra dirección supongamos que T es modelo completa y tiene la JEP y sean M_1, M_2 modelos de T. Por la JEP existe $N \models T$ e inmersiones $f_1 : M_1 \to N$ y $f_2 :\to N$. Por modelo-completud f_1, f_2 son elementales. Entonces $M_1 \equiv N \equiv M_2$. Esto establece la completud de T.

Definición **($T_\forall$, $T_\exists$ y $T_{\forall\exists}$)** $T_\forall$ es la teoría axiomatizada por todas las sentencias universales de T. Análogamente $T_\exists$ es la teoría axiomatizada por todas las sentencias existenciales de T y $T_{\forall\exists}$ es la teoría axiomatizada por todas las sentencias $\forall\exists$ de T.

Observación 6.10 *1. $T = T_\forall$ si y sólo si T se conserva bajo subestructuras.*

2. $T = T_\exists$ si y sólo si T se conserva bajo extensiones.

3. $T = T_{\forall\exists}$ si y sólo si T se conserva bajo uniones de cadenas.

Lema 6.11 *1.* $\mathrm{Mod}(T_\forall) = \{M : (\exists N \models T) M \subsetsim N\}$

2. $T_\forall \subseteq T'_\forall$ si y sólo si todo modelo de T' puede extenderse a un modelo de T.

3. $T_\forall = T'_\forall$ si y sólo si todo modelo de T puede extenderse a un modelo de T' y todo modelo de T' puede extenderse a un modelo de T.

Prueba. Obsérvese que *3* se sigue de *2* y que *2* se sigue de *1* dado que $T_\forall \subseteq T'$ si y sólo si $\mathrm{Mod}(T') \subseteq \mathrm{Mod}(T_\forall)$. Respecto a *1* es claro que si $M \subseteq N \models T$ entonces $M \models T_\forall$. Por otro lado, si $M \models T_\forall$ por compacidad es fácil ver que $T \cup \mathrm{Diag}(M)$ es consistente y por tanto que una extensión de M es modelo de T.

Proposición 6.12 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *T tiene eliminación de cuantificadores.*
2. *Si M es una subestructura de un modelo de T, $T \cup \mathrm{Diag}(M)$ es completo.*
3. *T es modelo-completa y $T_\forall$ tiene AP.*

Prueba. *1 ⇒ 2.* Sea M una subestructura de un modelo de T, sea L el lenguaje de T y sea σ una sentencia de $L(M)$. Hay entonces $\varphi(x) \in L$ y una tupla $a \in M$ tales que $\sigma = \varphi(a)$. Por otro lado hay $\psi(x) \in L$ sin cuantificadores y tal que $T \models \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$. En el caso $M \models \psi(a)$ tenemos que $\mathrm{Diag}(M) \vdash \psi(a)$ y por tanto $T \cup \mathrm{Diag}(M) \vdash \sigma$. Y en caso $M \models \neg\psi(a)$ se tiene que $\mathrm{Diag}(M) \vdash \neg\psi(a)$ y $T \cup \mathrm{Diag}(M) \vdash \neg\sigma$.

2 ⇒ 3. La modelo-completud de T se sigue de la Proposición 6.2. Verificamos que $T_\forall$ tiene AP. Sean M, M_1, M_2 modelos de $T_\forall$ y sean $f_1 : M \to M_1$ y $f_2 : M \to M_2$ inmersiones. Existen $M_1' \supseteq M_1$ y $M_2' \supseteq M_2$ que son modelos de T. Por completud de $T \cup \mathrm{Diag}(M)$ tenemos que $(M_1' f_1(a))_{a\in M} \equiv (M_2 f_2(a))_{a\in M}$. Por tanto uno de estos modelos tiene una extensión elemental en la que el otro es elementalmente inmersible. Existe así $N \succeq M_1'$ y una inmersión elemental $h : (M_2' f_2(a))_{a\in M} \to (N f_1(a))_{a\in M}$. Si $g_1 : M_1 \to N$ es la identidad y $g_2 : M_2 \to N$ es la restricción de h, resulta que $g_2 \circ f_2 = g_1 \circ f_1$.

3 ⇒ 1. Por la Proposición 5.2 basta probar que $M_2 \models \varphi(b)$ bajo la hipótesis de que M_1, M_2 son modelos de T, $\varphi(x)$ es una fórmula del lenguaje L de T y a, b son tuplas respectivamente de M_1 y M_2 tales que $M_1 \models \varphi(a)$ y para cada $\psi(x) \in L$ sin cuantificadores $M_1 \models \psi(a)$ si y sólo si $M_2 \models \psi(b)$. Sea M el submodelo de M_1 generado por la tupla a. Como a y b satisfacen las mismas fórmulas sin cuantificadores, la aplicación $a \mapsto b$ puede extenderse a una inmersión $f_2 : M \to M_2$. Sea $f_1 : M \to M_1$ la identidad. Como $T_\forall$ tiene AP, existe $N \models T_\forall$ e inmersiones $g_1 : M_1 \to N$ y $g_2 : M_2 \to N$ tales que $g_2 \circ f_2 = g_1 \circ f_1$. Podemos extender N a un modelo N' de T. Por modelo-completud de T las inmersiones $g_1 : M_1 \to N'$ y $g_2 : M_2 \to N'$ son elementales. Entonces $N' \models \varphi(g_1(f_1(a))$ y por tanto $N' \models \varphi(g_2(f_2(a))$ y $M_2 \models \varphi(f_2(a))$, esto es, $M_2 \models \varphi(b)$.

Definición (Modelo-consistencia y modelo-compañía) Las teorías T y T' son *modelo-consistentes* si todo modelo de T puede extenderse a un modelo de T' y todo modelo de T' puede extenderse a un modelo de T, es decir, si $T_\forall = T'_\forall$. Se dice que T^* es una *modelo-compañía de* T si T^* es modelo-completa y T, T^* son modelo-consistentes.

Proposición 6.13 (Robinson, 1963) *T tiene a lo sumo una modelo-compañía.*

Prueba. Supongamos que T^* y T' son modelo-compañías de T y veamos que $T^* \subseteq T'$. Para ello sea $M \models T'$ y veamos que $M \models T^*$. Como $T'_\forall = T_\forall = T^*_\forall$, T' y T^* son modelo-consistentes. Por tanto M puede extenderse a un modelo N de T^* y este modelo N puede a su vez extenderse a un modelo de T' y así sucesivamente. Por tanto podemos obtener una cadena $(M_i : i < \omega)$ de modelos de T' con $M = M_0$ y una cadena $(N_i : i < \omega)$ de modelos de T^* de manera que $M_i \subseteq N_i \subseteq M_{i+1}$. Como T' y T^* son modelo-completas estas cadenas son elementales. Entonces si $M_\omega = \bigcup_{i<\omega} M_i$ resulta que $M \preceq M_\omega$ y como además $M_\omega = \bigcup_{i<\omega} N_i$ se tiene que $N_0 \preceq M_\omega$. Por tanto $M \equiv M_\omega \equiv N_0$ y como $N_0 \models T^*$, $M \models T^*$.

Proposición 6.14 *1. T tiene una modelo-compañía si y sólo si $T_\forall$ la tiene y en ese caso las modelo-compañías coinciden.*

2. Si T^* es la modelo compañía de T, entonces $T_{\forall\exists} \subseteq T^* = T^*_{\forall\exists}$.

3. Si T^* es la modelo compañía de T, entonces todo modelo de T^* es existencialmente cerrado en T.

Prueba. El punto *1* es claro dado que T y $T_\forall$ son modelo-consistentes. Respecto a *2*, ya sabemos que como T^* es modelo-completa, $T^* = T^*_{\forall\exists}$. Falta mostrar que $T_{\forall\exists} \subseteq T^*$. Sea $\sigma = \forall x\varphi(x)$ donde x es una tupla de variables y $\varphi(x)$ es una fórmula existencial. Supongamos que $\sigma \in T$ y veamos que $M \models \sigma$ si M es un modelo arbitrario de T^*. Escojamos un modelo M' de T que extiende a M y un modelo M'' de T^* que extiende a M'. Como T^* es modelo-completa, $M \preceq M''$. Sea $a \in M$ una tupla y veamos que $M \models \varphi(a)$. Como $a \in M'$ y $M' \models T$, vemos que $M' \models \varphi(a)$. Como esta fórmula es existencial y $M' \subseteq M''$, $M'' \models \varphi(a)$. Al ser $M \preceq M''$ se puede concluir que $M \models \varphi(a)$. La prueba de *3* es análoga.

Definición (E_T y T^e) E_T es la clase de los modelos de T que son existencialmente cerrados en T y T^e es su teoría. Obsérvese que si $T = T_{\forall\exists}$ es consistente, entonces $E_T \neq \emptyset$ y T^e es consistente.

Proposición 6.15 (Eklof-Sabbagh, 1971) *Sea $T = T_{\forall\exists}$.*

1. Si T tiene una modelo-compañía T^*, entonces $\mathrm{Mod}(T^*) = E_T$ y $T^* = T^e$.

2. T tiene una modelo-compañía si y sólo si E_T es una clase EC_Δ.

Prueba. *1.* Ya sabemos que todo modelo de T^* pertenece a E_T. Por otro lado, si $M \in E_T$ como M es también existencialmente cerrado en T^* y M es extensible a un modelo de T^*, existe un modelo N de T^* tal que $M \preceq_1 N$. Ello implica que M satisface todas las sentencias $\forall\exists$ que son verdaderas en N. Como $T^* = (T^*)_{\forall\exists}$ se concluye que $M \models T^*$. Establecido que $\mathrm{Mod}(T^*) = E_T$, vemos que E_T es una clase EC_Δ y por ello es la clase de los modelos de su teoría: $E_T = \mathrm{Mod}(T^e)$. De aquí se sigue que $T^* = T^e$.

Una dirección de *2* se sigue de *1*. Queda mostrar que si E_T es EC_Δ entonces T tiene modelo-compañía. Por hipótesis E_T es la clase de los modelos de su teoría T^e. Veremos que T^e es modelo-compañía de T. Todo modelo M de T puede extenderse a un modelo de T^e. Ello es claro por el Lema 6.6 si $|M| \geq |T|$ y también es claro, por compacidad, si para cada n M tiene una extensión de tamaño $\geq n$ que es modelo de T. Y si esto no ocurre basta escoger una extensión finita $N \models T$ de M de tamaño máximo. Como N no tiene ninguna extensión propia que sea modelo de T, $N \in E_T$. Ahora, como $T \subseteq T^e$ y todo modelo de T puede extenderse a un modelo de T^e, resulta que T y T^e son modelo-consistentes. En segundo lugar, todo modelo de T^e es existencialmente cerrado en T y como T y T^e son modelo consistentes también es existencialmente cerrado en T^e. Por el test de Robinson T^e es modelo-completa.

Definición (Modelo-Compleción) Se dice que T^* es *modelo-compleción* de T si es modelo-compañía de T y además para cada $M \models T$, $T^* \cup \mathrm{Diag}(M)$ es completo. Claro está, toda teoría tiene a lo sumo una modelo-compleción.

Proposición 6.16 *Sea T^* modelo-compañía de T. Entonces T^* es modelo-compleción de T si y sólo si T tiene AP.*

Prueba. Supongamos primero que T^* es la modelo-compleción de T, sean M, M_1, M_2 modelos de T y sean $f_1 : M \to M_1$ y $f_2 : M \to M_2$ inmersiones. M_1 puede extenderse a un modelo M_1^* de T^* y M_2 puede extenderse aun modelo M_2^* de T^*. Como $T^* \cup \mathrm{Diag}(M)$ es completa,

$$(M_1^* f_1(a))_{a \in M} \equiv (M_2^* f_2(a))_{a \in M}.$$

Por tanto hay una extensión elemental N de M_1^* y una inmersión elemental $h : (M_2^* f_2(a))_{a \in M} \to (N f_1(a))_{a \in M}$. A su vez N puede extenderse a un modelo N' de T. Si $g_1 : M_1 \to N'$ es la identidad y $g_2 : M_2 \to N'$ es la restricción de h, resulta que $g_2 \circ f_2 = g_1 \circ f_1$.

Supongamos ahora que T tiene AP y que T^* es la modelo-compañía de T. Sea $M \models T$, sean M_1, M_2 modelos de T^* y sean $f_1 : M \to M_1$ y $f_2 : M \to M_2$ aplicaciones tales que $(M_1 f_1(a))_{a \in M} \models \mathrm{Diag}(M)$ y $(M_2 f_2(a))_{a \in M} \models \mathrm{Diag}(M)$. Queremos mostrar que $(M_1 f_1(a))_{a \in M} \equiv (M_2 f_2(a))_{a \in M}$. Los modelos M_1, M_2 pueden extenderse respectivamente a M_1' y M_2', modelos de T. Como $f_1 : M \to M_1'$ y $f_2 : M \to M_2'$ son inmersiones entre modelos de T y T tiene AP, existe $N \models T$ e inmersiones $g_1 : M_1' \to N$ y $g_2 : M_2' \to N$ tales que $g_2 \circ f_2 = g_1 \circ f_1$. Ahora N puede extenderse a un modelo N^* de T^*. Como T^* es modelo-completa, la restricción de g_1 a M_1 es una inmersión elemental de M_1 en N^*. Análogamente, la restricción de g_2 a M_2 es una inmersión elemental de M_2 en N^*. Por tanto si $\varphi(x)$ es una fórmula del lenguaje L de M y $a \in M$ es una tupla:

$$M_1 \models \varphi(f_1(a)) \Leftrightarrow N^* \models \varphi(g_1(f_1(a))) \Leftrightarrow N^* \models \varphi(g_2(f_2(a))) \Leftrightarrow M_2 \models \varphi(f_2(a)).$$

Proposición 6.17 *Sea T^* modelo-compañía de T.*

1. *Si T^* tiene eliminación de cuantificadores, entonces T^* es la modelo-compleción de T.*

2. *Si $T = T_\forall$, entonces T^* es la modelo compleción de T si y sólo si T^* tiene eliminación de cuantificadores.*

Prueba. *1* se obtiene usando el punto *2* de la Proposición 6.12. Respecto a *2*, supongamos que T^* es la modelo-compleción de T. Por la Proposición 6.16, $(T^*)_\forall = T_\forall = T$ tiene AP. Como T^* es modelo-completa, por el punto *3* de la Proposición 6.12 concluimos que T^* tiene eliminación de cuantificadores.

Definición (Operador de compañía) Un *operador de compañía* es una aplicación que asigna a cada teoría T otra teoría T^* de modo que:

1. T y T^* son modelo-consistentes.

2. Si T_1, T_2 son modelo-consistentes, $T_1^* = T_2^*$.

3. $T_{\forall\exists} \subseteq T^*$

Observación 6.18 *La aplicación $T \mapsto (T_\forall)^e$ es un operador de compañía. Además $(T_\forall)^e = (T_{\forall\exists})^e$.*

Proposición 6.19 *Si la aplicación $T \mapsto T^*$ es un operador de compañía y T tiene modelo-compañía, entonces T^* es la modelo-compañía de T.*

Prueba. Sea $T^\#$ la modelo-compañía de T. Como T y $T^\#$ son modelo consistentes $T^* = (T^\#)^*$. Como $T^\#$ es modelo-completa, $T^\# = (T^\#)_{\forall\exists}$. Así $T^\# = (T^\#)_{\forall\exists} \subseteq (T^\#)^* = T^*$. De ello se sigue que también T^* es modelo-completa y por tanto que también T^* es modelo-compañía de T. Por la unicidad de la modelo-compañía, $T^* = T^\#$.

Proposición 6.20 (Kaiser, 1969) *Sea T^0 la unión de todas las teorías $\forall\exists$ que son modelo-consistentes con T. La aplicación $T \mapsto T^0$ es un operador de compañía. Si $T \mapsto T^*$ es otro operador de compañía, $T^0 \subseteq T^*$.*

Prueba. Observemos en primer lugar que si T_1 y T_2 son dos teorías $\forall\exists$ que son modelo-consistentes con T también su unión es modelo-consistente con T. La razón es que un modelo arbitrario de T puede extenderse a un modelo de T_1 que a su vez puede extenderse a un modelo de T_2 y éste de nuevo se extiende a un modelo de T_1, etc. Esto produce una cadena de modelos alternados de T_1 y de T_2. Su unión es un modelo de $T_1 \cup T_2$ y una extensión de T. Por otro lado es claro que $T_{\forall\exists}$ es modelo-consistente con T y por ello $T_{\forall\exists} \subseteq T^0$. De estos dos puntos se sigue que T y T^0 son modelo-consistentes. Por otro lado, si T_1 y T_2 son teorías modelo-consistentes, entonces las teorías $\forall\exists$ que son modelo-consistentes con T_1 son las mismas que son modelo-consistentes con T_2. Por tanto en ese caso $(T_1)^0 = (T_2)^0$. Esto muestra que $T \mapsto T^0$ es un operador de compañía. Sea $T \mapsto T^*$ otro operador de compañía y veamos que $T^0 \subseteq T^*$. Para ello consideremos una teoría T' que sea $\forall\exists$ y sea modelo-consistente con T y veamos que $T' \subseteq T^*$. La razón es que $T' = (T')_{\forall\exists} \subseteq (T')^* = T^*$.

Capítulo 7

Omisión de tipos

Sea T una teoría consistente de lenguaje L. Mediante L_n nos referimos al conjunto de las fórmulas de L cuyas variables libres están en $\{x_i : i < n\}$. En particular, L_0 es el conjunto de las sentencias de L. Se dice que un conjunto de fórmulas $\Sigma(x)$ es *consistente con* T si $T \cup \Sigma(x)$ es consistente. Un *n-tipo de T* es un conjunto de fórmulas de L_n que es consistente con T. El n-tipo p es *completo* si para cada fórmula $\varphi(x) \in L_n$ o bien $\varphi(x) \in p$ o bien $\neg\,\varphi(x) \in p$. El espacio de los n-tipos de T es

$$S_n^T \quad = \quad \{p(x_0, \ldots, x_{n-1}) : p \text{ es un } n\text{-tipo completo de } T\ \}.$$

En ocasiones se habla de *tipos parciales* para enfatizar que se están considerando tipos no necesariamente completos. Sea $p(x_0, \ldots, x_{n-1})$ un n-tipo de T, y sea $M \models T$. Si $a \in M^n$ y $M \models p(a)$ decimos que *a es una realización de p* o que *a realiza p* y cuando el modelo M se sobrentiende escribimos $a \models p$. Si en M no hay ninguna realización de p, decimos que M *omite* p. Para cada n-tupla a en un modelo M de T el conjunto

$$\mathrm{tp}_M(a) = \{\varphi(x) \in L_n : M \models \varphi(a)\}$$

es un n-tipo completo de T, el *n-tipo de a en M*. Es fácil ver que todos los n-tipos completos se obtienen de esta manera, esto es

$$S_n^T \quad = \quad \{\mathrm{tp}_M(a) : a \in M^n \text{ para algún } M \models T\}.$$

Para $\varphi \in L_n$ definimos

$$[\,\varphi\,]_{T,n} \quad = \quad \{p \in S_n^T : \varphi \in p\}.$$

Si el contexto lo permite escribimos simplemente $[\,\varphi\,]_n$ o incluso $[\,\varphi\,]$.

Observación 7.1 *Si $\varphi, \psi \in L_n$, entonces*

1. $[\,(\varphi \wedge \psi)\,] = [\,\varphi\,] \cap [\,\psi\,]$
2. $[\,(\varphi \vee \psi)\,] = [\,\varphi\,] \cup [\,\psi\,]$
3. $[\,\neg\varphi\,] = S_n^T \smallsetminus [\,\varphi\,]$
4. $[\,\varphi\,] = S_n^T$ *si* $T \models \varphi$.
5. $[\,\varphi\,] = \emptyset$ *si* $T \models \neg\varphi$.

6. $[\varphi] \subseteq [\psi]$ *si y sólo si* $T \models \varphi \to \psi$

7. $[\varphi] = [\psi]$ *si y sólo si* $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Proposición 7.2 $\{[\varphi] : \varphi \in L_n\}$ *es una base para una topología en* S_n^T.

Prueba. Porque $S_n^T = [(\varphi \vee \neg\varphi)]$ y $[\varphi] \cap [\psi] = [(\varphi \wedge \psi)]$.

En lo sucesivo consideraremos a S_n^T como un espacio topológico, con la topología determinada por la base $\{[\varphi] : \varphi \in L_n\}$.

Proposición 7.3 *En* S_n^T, *un conjunto* F *es cerrado si y sólo si existe un conjunto de fórmulas* $\Sigma(x_0, \ldots, x_{n-1})$ *tal que* $F = \bigcap_{\varphi \in \Sigma} [\varphi] = \{p \in S_n^T : \Sigma \subseteq p\}$. *Además,* $F \neq \emptyset$ *si y sólo si* Σ *es consistente con* T.

Prueba. Como los abiertos son uniones de abiertos básicos, los cerrados son intersecciones de complementos de abiertos básicos, que también son abiertos básicos, pues la base está cerrada bajo complementación. Por otro lado, si $p \in \bigcap_{\varphi \in \Sigma} [\varphi]$, entonces $\Sigma \subseteq p$, de modo que cualquier realización de p en un modelo de T es también una realización de Σ. Y si a es una realización de Σ en un modelo M de T y definimos $p = \mathrm{tp}_M(a)_M$, resulta que $\Sigma \subseteq p$ y por tanto $p \in \bigcap_{\varphi \in \Sigma} [\varphi]$.

Proposición 7.4 S_n^T *es un espacio compacto, Hausdorff y cero-dimensional, es decir, es un espacio booleano.*

Prueba. Es claro que tiene una base de abierto-cerrados. Para ver que es Hausdorff, dados $p, q \in S_n^T$ distintos observamos que existe $\varphi \in p$ tal que $\varphi \notin q$. Pero entonces $\neg\varphi \in q$, con lo cual $p \in [\varphi]$ y $q \in [\neg\varphi]$. Para ver que es compacto, sea $\{F_i : i \in I\}$ una colección no vacía de cerrados con la pif y veamos que $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. Por la Proposición 7.3, existen una familia de conjuntos de fórmulas $(\Sigma_i : i \in I)$ tal que para cada $i \in I$, $F_i = \bigcap_{\varphi \in \Sigma_i} [\varphi]$. De este modo, si $\Sigma = \bigcup_{i \in I} \Sigma_i$, vemos que $\bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{\varphi \in \Sigma} [\varphi]$ de manera que, de nuevo por la Proposición 7.3 es suficiente demostrar que Σ es consistente con T. Para ello usamos el Teorema de Compacidad. Sea Δ un subconjunto finito de Σ y veamos que $\Delta \cup T$ es consistente. Existe un subconjunto finito J de I tal que si $\Sigma_J = \bigcup_{i \in J} \Sigma_i$, resulta $\Delta \subseteq \Sigma_J$. Entonces, como la colección tiene la pif, $\emptyset \neq \bigcap_{i \in J} F_i = \bigcap_{\varphi \in \Sigma_J} [\varphi]$ y por la Proposición 7.3, Σ_J es consistente con T, con lo cual también lo es Δ.

En tanto que espacio booleano, S_n^T es homeomorfo al espacio de Stone de un álgebra de Boole. En este caso el álgebra es el *álgebra de Lindenbaum-Tarski* $\mathbb{B}_T^n$. Sus elementos son las clases de equivalencia $[\varphi]_{\equiv_{n,T}} = \{\psi \in L_n : \varphi \equiv_{n,T} \psi\}$ de las fórmulas $\varphi \in L_n$ módulo T, donde $\varphi \equiv_{n,T} \psi$ si y sólo si $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Definición (Tipo aislado) Un n-tipo p de T es *aislado* en T si existe una fórmula $\psi(x) \in L_n$ tal que $\psi(x)$ es consistente con T y $T \models \psi(x) \to \varphi(x)$ para cada $\varphi(x) \in p$. Decimos entonces que $\psi(x)$ *aísla* p en T. Si no hay tal fórmula decimos que p es *no-aislado* en T.

El resultado principal de este capítulo es el Teorema de Omisión de Tipos. Este teorema establece que en toda teoría numerable toda colección numerable de tipos no-aislados es omisible. Daremos una prueba topológica. Adelantamos ahora una prueba alternativa que usa el método más básico de los modelos de Henkin y que es especialmente sencilla para el caso de omisión de un único tipo en una variable. La misma prueba puede generalizarse a la omisión de muchos tipos, pero a costa de complicar mucho la notación.

Teorema 7.5 (Omisión de tipos. Primera versión) *Sea L numerable y sea $p(x)$ un 1-tipo no-aislado de la teoría T de lenguaje L. Entonces existe un modelo numerable de T que omite $p(x)$.*

Prueba. Sea $C = \{c_n : n < \omega\}$ un conjunto de nuevas constantes distintas. Enumeramos el tipo $p(x) = \{\varphi_n(x) : n < \omega\}$ y enumeramos las sentencias $(\sigma_n : n < \omega)$ de $L \cup C$ de modo que para cada $n < \omega$, σ_n sea del lenguaje $L \cup \{c_i : i < n\}$. Definimos por inducción una secuencia $(T_n : n < \omega)$ de modo que

1. $T_0 = T$
2. T_{n+1} es un conjunto consistente de sentencias de $L \cup \{c_i : i < n+1\}$ y es una extensión de T_n obtenida por la adición de un número finito de sentencias.
3. $\sigma_n \in T_{n+1}$ o $\neg\sigma_n \in T_{n+1}$.
4. Si $\sigma_n = \exists x\varphi$ y $\sigma_n \in T_{n+1}$, entonces para algún $m < \omega$, $(\varphi(c_n) \wedge \neg\varphi_m(c_n)) \in T_{n+1}$.

Veamos primero que esta construcción puede llevarse a cabo. La teoría inicial $T_0 = T$ es consistente dado que la mera existencia de un tipo $p(x)$ en T implica la consistencia de T. Consideremos la obtención de T_{n+1}. Si σ_n no es consistente con T, debe serlo $\neg\sigma_n$ y ponemos $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg\sigma_n\}$. Si T_n es consistente con T y σ_n no comienza con un cuantificador existencial, ponemos $T_{n+1} = T_n \cup \{\sigma_n\}$. Supongamos ahora que $\sigma_n = \exists x\varphi(x)$ es consistente con T_n. Sea σ la conjunción de las sentencias de T_n que no están en T. Entonces $\sigma \wedge \exists x\varphi(x)$ es una sentencia de $L \cup \{c_i : i < n\}$. Sea $\psi(x_0, \ldots, x_{n-1}, x)$ una fórmula de L tal que $\psi(c_0, \ldots, c_{n-1}, x) = \sigma \wedge \varphi(x)$. Entonces $\exists x_0 \ldots x_{n-1}\psi(x_0, \ldots, x_{n-1}, x)$ es consistente con T. Como $p(x)$ no es aislado, debe haber un $m < \omega$ para el que $\exists x_0 \ldots x_{n-1}\psi(x_0, \ldots, x_{n-1}, x) \wedge \neg\varphi_m(x)$ es consistente con T. Como las constantes $c_0, \ldots, c_n$ no aparecen en esta fórmula ni en T, también es consistente con T la sentencia $\psi(c_0, \ldots, c_n) \wedge \neg\varphi_m(c_n)$. Entonces podemos garantizar que $T_{n+1} = T_n \cup \{(\varphi(c_n) \wedge \neg\varphi_m(c_n))\}$ es consistente.

Una vez efectuada la construcción, consideremos la teoría $T_\omega = \bigcup_{n<\omega} T_n$. Es una teoría consistente y completa de lenguaje $L \cup C$ y tiene ejemplificaciones en C. Por el Lema 3.3 existe un modelo M de T_ω tal que $M = \{c_n^M : n < \omega\}$. Sea $M' = M \upharpoonright L$. Claramente, se trata de un modelo numerable de T. Veamos que omite $p(x)$. En caso contrario posee una realización a de $p(x)$. Debe haber $n < \omega$ tal que $a = c_n^M$. La sentencia $\exists x\, x = c_n$ debe aparecer en la enumeración inicial, digamos que es la sentencia σ_m. Como es consistente con T_m debe haber un $k < \omega$ tal que $(c_m = c_n \wedge \neg\varphi_k(c_m)) \in T_{m+1}$. Entonces T_ω implica $\neg\varphi_k(c_n)$, con lo cual $M' \models \neg\varphi_k(a)$. Esto contradice a la elección de a como una realización de $p(x)$.

Presentamos a continuación los resultados necesarios para la demostración topológica de la versión general del Teorema de Omisión de Tipos.

Proposición 7.6 *El n-tipo p de T es no-aislado en T si y sólo si el cerrado $\bigcap_{\varphi\in p}[\,\varphi\,]$ es denso en ninguna parte en S_n^T.*

Prueba. Como $\bigcap_{\varphi\in p}[\,\varphi\,]$ es un cerrado, esta intersección es densa en ninguna parte si y sólo si no contiene ningún abierto no vacío si y sólo si no contiene ningún abierto-cerrado no vacío. Todo abierto-cerrado es de la forma $[\,\psi\,]$ para alguna fórmula $\psi \in L_n$. El abierto-cerrado es no vacío si y sólo si ψ es consistente con T y el abierto-cerrado está contenido en $\bigcap_{\varphi\in p}[\,\varphi\,]$ si y sólo si $T \models \psi \to \varphi$ para cada $\varphi \in p$.

Definición (ω-tipo) L_ω es el conjunto de las fórmulas de L, por tanto el conjunto de las fórmulas cuyas variables libres están en el conjunto $\{x_i : i \in \omega\}$. Un *ω-tipo* de T es un conjunto de fórmulas de L_ω que es consistente con T. Una realización de un ω-tipo p en un modelo M de T es ahora una secuencia $(a_i : i < \omega\,)$ de elementos de M que satisface todas las fórmulas de p en M interpretando cada variable x_i como el correspondiente elemento a_i. El espacio de los ω-tipos completos de T es S_ω^T. Generalizando lo hecho en el caso $n < \omega$, se puede definir $[\,\varphi\,]_{T,\omega} = \{\, p \in S_\omega^T : \varphi \in p\}$ para $\varphi \in L_\omega$ y las proposiciones 7.2, 7.3 y 7.4 siguen siendo válidas para S_ω^T.

Proposición 7.7 *Si*

$$\mathbb{M} \;=\; \bigcap_{i<\omega}\;\bigcap_{\varphi\in L_{i+1}}\;\bigcup_{j<\omega}[\,(\exists x_i\,\varphi \to \varphi(\tfrac{x_i}{x_j}))\,],$$

entonces para cada $p \in S_\omega^T$, cada $M \models T$ y cada realización $(a_i : i < \omega)$ de p en M las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *$p \in \mathbb{M}$,*
2. *$\{a_i : i < \omega\}$ es el universo de una subestructura elemental de M.*

Además para cada $i < \omega$ y cada $\varphi \in L_{i+1}$ el conjunto $\bigcup_{j<\omega}[\,(\exists x_i\,\varphi \to \varphi(\tfrac{x_i}{x_j}))\,]$ es denso abierto en S_ω^T.

Prueba. Por el Test de Tarski-Vaught sabemos que la condición *2* equivale a la siguiente condición:
(i) para cada $\varphi(x, y)$ de L y cada tupla $a \in \{a_i : i < \omega\}$, si $M \models \exists y\,\varphi(a, y)$ entonces hay $b \in \{a_i : i < \omega\,\}$ tal que $M \models \varphi(a, b)$.
condición a su vez equivalente a
(ii) para cada $i < \omega$ y cada $\varphi \in L_{i+1}$, si $M \models \exists x_i\,\varphi((a_i : i < \omega))$ entonces hay $j < \omega$ tal que $M \models \varphi(\tfrac{x_i}{x_j})((a_i : i < \omega))$
y a
(iii) para cada $i < \omega$ y cada $\varphi \in L_{i+1}$, si $\exists x_i\,\varphi \in p$, entonces hay $j < \omega$ tal que $\varphi(\tfrac{x_i}{x_j}) \in p$
y esta última condición es claramente equivalente a $p \in \mathbb{M}$.
Veamos ahora que $D_{i,\varphi} = \bigcup_{j<\omega}[\,(\exists x_i\,\varphi \to \varphi(\tfrac{x_i}{x_j}))\,]$ es denso abierto. Es claro que $D_{i,\varphi}$ es un abierto, de modo que basta mostrar que para cada fórmula $\psi \in L_\omega$, si $[\,\psi\,] \neq \emptyset$, entonces $[\,\psi\,] \cap D_{i,\varphi} \neq \emptyset$. Sea $j < \omega$ tal que $\psi \in L_j$ y $i < j$. Entonces $[\,\psi\,] \cap [\,(\exists x_i\,\varphi \to \varphi(\tfrac{x_i}{x_j}))\,] \neq \emptyset$. En efecto, supongamos primero que $(\psi \wedge \exists x_i\,\varphi)$ es inconsistente con T. Como por hipótesis ψ es consistente con T, en un modelo M de T existe una tupla que satisface ψ. Esa tupla puede prolongarse de modo arbitrario a una secuencia $(a_i : i < \omega)$ en M y es claro

que $M \models (\exists x_i \, \varphi \to \varphi(\frac{x_i}{x_j}))((a_i : i < \omega))$. Y si, por el contrario, $(\psi \wedge \exists x_i \, \varphi)$ es consistente con T, tenemos en un modelo M de T una tupla que satisface $(\psi \wedge \exists x_i \, \varphi)$. Eligiendo una adecuada interpretación para x_j también ahora la tupla puede prolongarse a una secuencia $(a_i : i < \omega)$ en M que satisface el condicional.

Proposición 7.8 *Si p es un n-tipo de T que no es aislado en T y q es un m-tipo de T que se obtiene a partir de q por sustitución de variables, q es un m-tipo no aislado en T.*

Prueba. Sea $\pi : n \to m$ y supongamos que $q = p_\pi = \{\varphi_\pi : \varphi \in p\}$, donde para cada $\varphi \in L_n$,

$$\varphi_\pi = \varphi \begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{\pi(0)} & \cdots & x_{\pi(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Supongamos que $\psi \in L_m$ aísla p_π en T. Podemos suponer que las variables libres de ψ están entre $x_{\pi(0)}, \ldots, x_{\pi(n-1)}$ pues las restantes pueden cuantificarse existencialmente al no estar libres en p_π. Podemos encontrar entonces $\psi' \in L_n$ tal que $\psi'_\pi = \psi$. En ese caso la fórmula

$$\psi'(x_0, \ldots, x_n) \wedge \bigwedge \{x_i = x_j : i < j < n \text{ y } \pi(i) = \pi(j)\}$$

aísla p en T.

Proposición 7.9 *Si $\omega \geq \alpha \geq \beta$, la función $f : S_T^\alpha \to S_T^\beta$ definida por $f(p) = \{\varphi \in p : \varphi \in L_\beta\}$ es una aplicación abierta y continua.*

Prueba. Sea $\varphi \in L_\beta$, entonces $f^{-1}([\varphi]_\beta) = [\varphi]_\alpha$. Esto muestra que f es continua. Sea $\varphi \in L_\alpha$, digamos $\varphi = \varphi(x_{i_0}, \ldots, x_{i_n})$ donde $i_0 < \cdots < i_k < \beta \leq i_{k+1} < \cdots < i_n$. Sea

$$\psi(x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}) = \exists x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} \, \varphi(x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}).$$

Entonces $\psi \in L_\beta$ y $f([\varphi]_\alpha) = [\psi]_\beta$. Esto muestra que f es abierta.

Teorema 7.10 (Omisión de Tipos. Versión general) *Sea L numerable y para cada $n \in \omega$ sea P_n un conjunto numerable de n-tipos de T no-aislados en T. Entonces existe un modelo numerable de T que omite todos los tipos de $\bigcup_{n\in\omega} P_n$.*

Prueba. Por la Proposición 7.8 podemos suponer que la colección $\bigcup_{n\in\omega} P_n$ está cerrada bajo sustitución de variables, pues al cerrarla seguimos teniendo una colección numerable de tipos no-aislados. Sea $n \in \omega$ y $p \in P_n$. Como p es un n-tipo no-aislado en T por la Proposición 7.6 el conjunto $\bigcap_{\varphi\in p}[\varphi]_n$ es un cerrado denso en ninguna parte en S_n^T. Si $f : S_\omega^T \to S_n^T$ es la función continua y abierta de la Proposición 7.9, tenemos que $\bigcap_{\varphi\in p}[\varphi]_\omega = f^{-1}(\bigcap_{\varphi\in p}[\varphi]_n)$ y por tanto $\bigcap_{\varphi\in p}[\varphi]_\omega$ es un cerrado denso en ninguna parte en S_ω^T, es decir $\bigcup_{\varphi\in p}[\neg\varphi]_\omega$ es un denso abierto en S_ω^T. Sea $\mathbb{M}$ el subconjunto de S_ω^T definido como en la Proposición 7.7. Por el Teorema de Categoría de Baire existe un ω-tipo q de T tal que

$$q \in \mathbb{M} \cap \bigcap_{n\in\omega} \bigcap_{p\in P_n} \bigcup_{\varphi\in p} [\neg\,\varphi]_\omega.$$

Sea $(a_i : i \in \omega)$ una realización de q en un modelo N de T. Como $q \in \mathbb{M}$, por la Proposición 7.7 sabemos que $\{a_i : i \in \omega\}$ es el universo de una subestructura elemental M de N.

Veamos que M omite todos los tipos de $\bigcup_{n\in\omega} P_n$. Supongamos que, por el contrario, existe para algún n un $p \in P_n$ que se realiza en M, digamos que mediante la n-tupla $a_{i_0}, \ldots, a_{i_{n-1}}$. Sea $m = \text{máx}\{i_0, \ldots, i_{n-1}\} + 1$ y sea $\pi : n \to m$ la función definida por $\pi(j) = i_j$ para cada $j < n$. Entonces la m-tupla $a_0, \ldots, a_{m-1}$ realiza en M el tipo p_π obtenido al sustituir en p las variables $x_0, \ldots, x_{n-1}$ por las correspondientes variables $x_{\pi(0)}, \ldots, x_{\pi(n-1)}$. Pero en ese caso para cada $\varphi \in p_\pi$, tenemos $\varphi \in q$ y por tanto $q \in [\varphi]_\omega$. Esto contradice la suposición de que $p_\pi \in P_m$.

Definición (ω-modelo, ω-lógica) Fijemos un predicado monádico $\mathcal{N}$ y un tipo de semejanza $L_\mathcal{N} = \{0, S\}$, donde 0 es una constante y S es un símbolo funcional monádico. Sea L un lenguaje que extiende a $L_\mathcal{N} \cup \{\mathcal{N}\}$. Decimos que una L-estructura M es un *ω-modelo* si $\mathcal{N}^M$ es un subconjunto $L_\mathcal{N}$-cerrado de M (es decir, contiene a 0^M y está cerrado bajo S^M) y la subestructura de $M \restriction L_\mathcal{N}$ de universo $\mathcal{N}^M$ (la $L_\mathcal{N}$-estructura $(\mathcal{N}^M, 0^M, S^M \restriction \mathcal{N}^M)$) es isomorfa a $(\omega, 0, S)$, la estructura de los números naturales con el número cero y la función sucesor. Obérvese que la condición de que $\mathcal{N}^M$ sea $L_\mathcal{N}$ cerrado consiste simplemente en ser un modelo de las sentencias

1. $\mathcal{N}(0)$
2. $\forall x(\mathcal{N}(x) \to \mathcal{N}(S(x)))$.

Sin embargo la condición de ser un ω-modelo no se puede cifrar en satisfacer un conjunto de sentencias. Los ω-modelos son los modelos de estas sentencias que además omiten el tipo

$$\mathcal{N}(x)\} \cup \{x \neq S^n(x) : n \geq 1\}$$

donde $S^n = S \cdots S$ n veces. La *ω-lógica* es la lógica de primer orden restringida a la sola consideración de ω-modelos. Se contemplan únicamente lenguajes que extienden a $L_\mathcal{N} \cup \{\mathcal{N}\}$. Sea Σ un conjunto de sentencias de uno de estos lenguajes. Se dice que Σ es *satisfacible en ω-lógica* si y sólo si Σ tiene un ω-modelo. Y se dice que una sentencia φ es *consecuencia en ω-lógica* del conjunto de sentencias Σ si todo ω-modelo de Σ es un modelo de φ. Escribimos en ese caso $\Sigma \models_\omega \varphi$. Estas nociones se definen de modo análogo para conjuntos de fórmulas y fórmulas que no son necesariamente sentencias.

Definición (ω-regla) Sea de nuevo L un lenguaje que extiende a $L_\mathcal{N} \cup \{\mathcal{N}\}$. La *$\omega$-regla* es la regla que permite inferir $\forall x(\mathcal{N}(x) \to \varphi(x))$ a partir del conjunto de premisas $\{\varphi(S^n(0)) : n < \omega\}$. Se dice que un conjunto de fórmulas Σ está *cerrado bajo la ω-regla* si al aplicar la ω-regla a fórmulas de Σ se obtienen fórmulas de Σ. Para cada conjunto de fórmulas Σ existe un conjunto mínimo Σ' que extiende a Σ y está cerrado bajo consecuencia y bajo la ω-regla. Para obtenerlo basta con poner $\Sigma' = \bigcup_{i<\omega_1} \Sigma_i$, donde

- $\Sigma_0 = \Sigma$
- Σ_{i+1} es el resultado de agregar a $\{\varphi : \Sigma_i \models \varphi\}$ todas las fórmulas que se obtienen aplicando la ω regla a elementos de este conjunto de fórmulas.
- $\Sigma_i = \bigcup_{j<i} \Sigma_j$ si i es un ordinal límite.

Ponemos $\Sigma \vdash_\omega \varphi$ y decimos que φ es *deducible en ω-lógica a partir de* Σ si $\varphi \in \Sigma'$. Obsérvese que la relación $\vdash_\omega$ puede caracterizarse de modo puramente sintáctico como deducibilidad en un cálculo que usa las reglas y axiomas de la lógica de primer orden y adicionalmente la ω-regla. Las deducciones en este cálculo tienen longitud infinita pero esta longitud es un ordinal numerable.

Observación 7.11 *Si $L = \{+, \cdot, S, 0, \mathcal{N}\}$ y Σ está formado por las sentencias*

1. $\forall x\, \mathcal{N}(x)$
2. $\forall x\, x + 0 = x$
3. $\forall xy\, x + S(y) = S(x + y)$
4. $\forall x\, x \cdot 0 = 0$
5. $\forall xy\, x \cdot S(y) = x \cdot y + x$

entonces el conjunto de las sentencias φ de L tales que $\Sigma \vdash_\omega \varphi$ es la teoría completa de la estructura $(\omega, +, \cdot, S, 0)$.

Proposición 7.12 *Si L es numerable y extiende a $L_{\mathcal{N}}$, Σ es un conjunto de sentencias de L y φ es una sentencia de L, entonces $\Sigma \models_\omega \varphi$ si y sólo si $\Sigma \vdash_\omega \varphi$.*

Prueba. Para establecer que si $\Sigma \vdash_\omega \varphi$ entonces $\Sigma \models_\omega \varphi$ basta observar que la ω-regla preserva la satisfacción de las sentencias si sólo se consideran ω-modelos. Para la otra dirección, supongamos que $\Sigma \models_\omega \varphi$ pero que $\Sigma \nvdash_\omega \varphi$. Sea $\Sigma' = \{\psi : \Sigma \vdash_\omega \psi\}$ y sea $p(x) = \{\mathcal{N}(x)\} \cup \{\neg x = S^n(0) : n < \omega\}$. Entonces $T = \Sigma' \cup \{\neg\varphi\}$ es consistente. Vamos a ver en primer lugar que $p(x)$ no es aislado en T. Sea $\psi(x)$ consistente con T. Si $T \models \psi(x) \to \neg S^n(0) = x$ para cada $n < \omega$ entonces por la ω-regla $T \models \forall x(\mathcal{N}(x) \to \neg\psi(x))$ de modo que $\psi(x)$ no puede implicar $\mathcal{N}(x)$ en T. Como $p(x)$ no es aislado y L es numerable, por el Teorema de Omisión de Tipos hay un modelo M de T que omite $p(x)$. Como M omite $p(x)$, es un ω-modelo. Pero esto contradice la hipótesis de que $\Sigma \models_\omega \varphi$.

Capítulo 8

Saturación

Vamos a generalizar la noción de tipo en dos sentidos. Por un lado consideraremos tipos no sólo de n-tuplas o de ω-secuencias sino también tipos de I-secuencias para cualquier conjunto de índices I. Por otro lado admitiremos tipos sobre conjuntos de parámetros y no sólo tipos sobre el conjunto vacío. Sea I un conjunto arbitrario. Ampliamos el lenguaje formal introduciendo nuevas variables $\{x_i : i \in I\}$. L_I es el conjunto de las fórmulas de L cuyas variables libres están en el conjunto $\{x_i : i \in I\}$. Un *I-tipo de la teoría T* es un conjunto de fórmulas de L_I que es consistente con T. Un I-tipo p es completo si para cada $\varphi \in L_I$, o bien $\varphi \in p$ o bien $\neg\varphi \in p$. El espacio de los I-tipos de T es S_I^T. Al igual que S_n^T, es un espacio booleano. Obsérvese que $|L_I| = |I| + |L| + \omega$ y que $|S_I^T| \leq 2^{|I|+|L|+\omega}$.

Sea ahora T una teoría consistente y completa de tipo L, sea $M \models T$ y sea $A \subseteq M$. Recordemos que mediante $L(A)$ nos referimos al lenguaje que amplía a L mediante la introducción de una constante nueva y distinta para cada $a \in A$. La estructura M_A es la expansión de M en la que cada constante se interpreta como el correspondiente elemento de A. Si el contexto elimina las posibles ambigüedades, nos referiremos con $T(A)$ a la teoría de la expansión M_A, esto es $T(A) = \mathrm{Th}(M_A)$. Para cada conjunto de índices I tenemos el espacio topológico asociado

$$S_I^M(A) = S_I^{T(A)}.$$

Si no hay confusión ponemos simplemente $S_I(A)$. Si $M \preceq N$ y $A \subseteq M$, entonces $\mathrm{Th}(M_A) = \mathrm{Th}(N_A)$ y por ello $S_I^M(A) = S_I^N(A)$. Un *I-tipo (de M) sobre A* es un I-tipo de $\mathrm{Th}(M_A)$. Obsérvese que para T completa $S_I^T = S_I^M(\emptyset)$ para cualquier $M \models T$ y para T incompleta $S_I^T = \bigcup_{M\models T} S_I^M(\emptyset)$.

Si p es un I-tipo sobre A y $J \subseteq I$, usaremos la notación $p \restriction J$ o $p \restriction \{x_i : i \in J\}$ para referirnos al J-tipo sobre A constituido por las fórmulas de p que están en L_J. Y si $B \subseteq A$, la notación $p \restriction B$ referirá al I-tipo sobre B constituido por las fórmulas de p que están en $L(B)$.

Observación 8.1 *Para un modelo M de T con $A \subseteq M$ y un conjunto Σ de fórmulas de $L_I(A)$ son equivalentes,*

1. *Σ es un I-tipo de M sobre A.*
2. *Σ es finitamente satisfacible en M.*
3. *Σ es satisfacible en una extensión elemental de M.*

Lema 8.2 *Si M es un modelo de tipo L y $P \subseteq S_I^M(A)$, entonces existe $N \succeq M$ de cardinalidad $\leq |P| + |L| + |M| + |I| + \omega$ que realiza todos los tipos de P.*

Prueba. Sea D el diagrama elemental de M expresado con el conjunto de constantes C. Para cada $p \in P$ sea $C_p = \{c_i^p : i \in I\}$ un conjunto de constantes distintas y nuevas ($C_p \cap C_q = C_p \cap (L \cup C) = \emptyset$ si $p \neq q$) y sea $p' = p(c_i^p : i \in I)$. Finalmente pongamos $\Sigma = D \cup \bigcup_{p \in P} p'$. Cada subconjunto finito de Σ es satisfacible en alguna expansión de M. Por los teoremas de compacidad y Löwenheim-Skolem, Σ es satisfecho en un modelo N de cardinalidad $\leq |L| + |C| + |\bigcup_{p \in P} C_p| + \omega = |P| + |L| + |M| + |I| + \omega$. Entonces $N \restriction L$ es la extensión de M que buscábamos.

Definición Sea $A \subseteq M$ y $a = (a_i : i \in I)$ una secuencia de elementos de M. Se define el *tipo de a sobre A* como

$$\mathrm{tp}_M(a/A) = \{\varphi(x) \in L_I(A) : M \models \varphi(a)\}.$$

Si el contexto lo permite escribimos $\mathrm{tp}(a/A)$ en vez de $\mathrm{tp}_M(a/A)$.

Observaciones 8.3 *Sea $A \subseteq M$ y sea a una I-secuencia de elementos de M. Entonces:*

1. *Para cada I-tipo p de M sobre A, $a \models p$ si y sólo si $p \subseteq \mathrm{tp}_M(a/A)$.*
2. *Para cada $p \in S_I^M(A)$, $a \models p$ si y sólo si $p = \mathrm{tp}_M(a/A)$.*
3. *Si $N \succeq M$, entonces $\mathrm{tp}_M(a/A) = \mathrm{tp}_N(a/A)$.*

Proposición 8.4 *Si $A \subseteq M$, existe $N \succeq M$ tal que $S_I^M(A) = \{\mathrm{tp}_N(a/A) : a \in N^I\}$ y $|N| \leq |M| + 2^{|A|+|L|+|I|+\omega}$.*

Prueba. Tómese con el Lema 8.2 una extensión elemental N de M donde todo $p \in S_I^M(A)$ se realiza y obsérvese que $|S_I^M(A)| \leq 2^{|A|+|L|+|I|+\omega}$.

Proposición 8.5 *Sea $A \subseteq M$ y sean $a = (a_i : i \in I)$ y $b = (b_i : i \in I)$ secuencias de elementos de M. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{tp}_M(a/A) = \mathrm{tp}_M(b/A)$.
2. *Para cada $B \subseteq A$ finito,* $\mathrm{tp}_M(a/B) = \mathrm{tp}_M(b/B)$.
3. *Para cada $I_0 \subseteq I$ finito* $\mathrm{tp}_M(a \restriction I_0/A) = \mathrm{tp}_M(b \restriction I_0/A)$.
4. *Para cada enumeración c de A,* $\mathrm{tp}_M(a, c/\emptyset) = \mathrm{tp}_M(b, c/\emptyset)$.
5. $(M_A, a) \equiv (M_A, b)$.

Definición (Aplicaciones elementales parciales) Una *aplicación elemental parcial* de un modelo M en un modelo N es una función f con $\mathrm{dom} f \subseteq M$, $\mathrm{rec} f \subseteq N$ y tal que para cada tupla $a \in \mathrm{dom} f$, $\mathrm{tp}_M(a/\emptyset) = \mathrm{tp}_N(f(a)/\emptyset)$. Obviamente, la existencia de una tal aplicación presupone que $M \equiv N$.

Observación 8.6 *Sea $A \subseteq M$ y sean a, b I-secuencias de elementos de M. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(b/A)$

2. $\{(a,b)\} \cup id_A$ *es una aplicación elemental parcial de M en M.*

Definición (Tipos conjugados) Sea f una aplicación elemental parcial de M en N con $A \subseteq \mathrm{dom} f$ y sea p un I-tipo sobre A. El *tipo conjugado de p por f* es el I-tipo sobre $f(A)$ que se obtiene sustituyendo en cada fórmula de p los parámetros de A por los correspondientes parámetros de $f(A)$, es decir,

$$p^f = \{\varphi(x, f(a)) : \varphi(x, a) \in p\}.$$

Si p es completo, también p^f lo es. La conjugación mediante f induce un homeomorfismo entre los espacios topológicos $S_I^M(A)$ y $S_I^N(f(A))$.

Observación 8.7 *Sea f una aplicación elemental parcial de M en N, $A \subseteq \mathrm{dom} f$, a una I-secuencia de elementos de M, $p = \mathrm{tp}(a/A)$ y $b \in N^I$. Son entonces equivalentes:*

1. $b \models p^f$

2. $\{(a,b)\} \cup f \restriction A$ *es elemental.*

Además, si $g \supseteq f \restriction A$ es elemental y $a \in \mathrm{dom} g$, entonces $p^f = \mathrm{tp}(g(a)/f(A))$.

Lema 8.8 *Si f es una aplicación elemental parcial de M en M, existe $N \succeq M$ y $g \in \mathrm{Aut} N$ tal que $f \subseteq g$. Se puede obtener este N con la propiedad adicional de que $|N| \leq |M| + |L| + \omega$.*

Prueba. Observemos primero que existe $M' \succeq M$ y una aplicación elemental parcial f' de M' en M' tal que $f \subseteq f'$ y $M \subseteq \mathrm{dom} f'$. Para mostrarlo basta tomar una enumeración arbitraria $a = (a_i : i \in I)$ de M, considerar el tipo $p = \mathrm{tp}(a/\mathrm{dom} f)$, realizar p^f mediante una I-secuencia b en una extensión elemental M' de M y poner $f' = \{(a,b)\} \cup f$. Hecha esta observación podemos construir una cadena elemental $(M_n : n \in \omega)$ y una cadena $(f_n : n \in \omega)$ de aplicaciones comenzando con $M_0 = M$ y $f_0 = f$ y consiguiendo que f_n sea una aplicación elemental parcial de M_n en M_n con $M_{2n} \subseteq \mathrm{dom} f_{2n+1}$ y $M_{2n+1} \subseteq \mathrm{rec} f_{2n+2}$. Si N es la unión de la cadena y $g = \bigcup_{n \in \omega} f_n$, resulta que g es un automorfismo de N que extiende a f.

Teorema 8.9 *Sea $A \subseteq M$ y sean $a, b \in M$. Son entonces equivalentes:*

1. $\mathrm{tp}_M(a/A) = \mathrm{tp}_M(b/A)$

2. *Hay $N \succeq M$ y $f \in \mathrm{Aut}_A N$ tales que $f(a) = b$.*

Prueba. Una dirección es inmediata y la otra se sigue del Lema 8.8.

Definición (Modelo κ-saturado, modelo saturado) Sea κ un cardinal infinito. Un modelo M es *κ-saturado* si realiza todos los 1-tipos sobre subconjuntos $A \subseteq M$ de cardinalidad $< \kappa$. Obsérvese que un modelo de cardinal infinito κ es a lo sumo κ-saturado. Decimos en ese caso que M es *saturado*.

Lema 8.10 *Sea M un modelo κ-saturado y $A \subseteq M$ y $|A| < \kappa$. Si $|I| \leq \kappa$, todo I-tipo sobre A se realiza en M.*

Prueba. Sea $A \subseteq M$ con $|A| < \kappa$ y sea $p \in S_I(A)$. Podemos suponer que $I = \kappa$. Vemos que existe en M una secuencia $(a_i : i < \kappa)$ tal que $\overline{a}_\alpha \models p_\alpha$ para cada ordinal $\alpha \leq \kappa$, donde $\overline{a}_\alpha = (a_i : i < \alpha)$ y $p_\alpha = p \cap L_\alpha(A)$. Estas secuencias $\overline{a}_\alpha$ se construyen inductivamente comenzando con la secuencia nula, haciendo que unas sean prolongación de otras y tomando uniones en los límites. Indicamos cómo se obtiene $\overline{a}_{\alpha+1}$ a partir de $\overline{a}_\alpha$. Lo que necesitamos es prolongar $\overline{a}_\alpha$ añadiendo un punto a_α de modo adecuado. Sea $q = q(x_\alpha)$ el resultado de sustituir en el tipo $p_{\alpha+1}$ las variables $\{ x_i : i < \alpha \}$ por los correspondientes parámetros $\{ a_i : i < \alpha \}$. Se trata de un 1-tipo sobre el conjunto $A \cup \{ a_i : i < \alpha \}$ y el cardinal de este conjunto es $< \kappa$. Por κ-saturación existe en M una realización a_α de q. Este es el punto buscado.

Definición (Modelo κ-universal, modelo universal) Sea κ un cardinal infinito. Un modelo es *κ-universal* si en él son elementalmente inmersibles todos los otros modelos de su misma teoría completa que tengan cardinalidad $< \kappa$. Un modelo de cardinalidad κ es a lo sumo κ^+-universal. En ese caso se dice que es *universal*.

Proposición 8.11 *Si M es κ-saturado, entonces M es κ^+-universal.*

Prueba. Sea $N \equiv M$ tal que $|N| \leq \kappa$ y veamos que N es elementalmente inmersible en M. Sea $a = (a_i : i < \kappa)$ una enumeración de N y sea $p = \mathrm{tp}_N(a/\emptyset)$. Entonces $p \in S^M_\kappa(\emptyset)$ y hay entonces una secuencia $(b_i : i < \kappa)$ en M que realiza p. La aplicación $f : N \to M$ definida por $f(a_i) = b_i$ es elemental.

Lema 8.12 *Si $\kappa \geq |T|$, existe un modelo de T de cardinal $\leq 2^\kappa$ que es κ^+-saturado. Si $\kappa \geq |M| + |L| + \omega$, existe $N \succeq M$ de cardinal $\leq 2^\kappa$ que es κ^+-saturado.*

Prueba. La segunda afirmación se obtiene aplicando la primera al diagrama elemental de M. Para justificar la primera afirmación, se construye una cadena elemental $(M_i : i < \kappa^+)$ de modelos M_i de cardinal $\leq 2^\kappa$, de modo que para cada $A \subseteq M_i$ con $|A| \leq \kappa$, todo $p \in S_1^{M_i}(A)$ se realice en M_{i+1}. La unión de la cadena es el modelo buscado.

Teorema 8.13 *Sea $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ y $\kappa \geq |L|$. Las siguientes condiciones son entonces equivalentes para T completa:*

1. *T tiene un modelo saturado de cardinal κ.*

2. *Para cada $n \in \omega$, $|S^T_n| \leq \kappa$.*

3. Para cada $M \models T$ y cada $A \subseteq M$ con $|A| < \kappa$, $|S_1^M(A)| \leq \kappa$.

Prueba. *1* $\Rightarrow$ *2*. Sea $M \models T$ saturado y de cardinal κ y para cada $p \in S_n^T$ escojamos una n-tupla $a_p \in M$ que realiza p. Si $p \neq q$, entonces $a_p \neq a_q$. Por tanto $|S_n^T| \leq |\{a_p : p \in S_n^T\}| \leq |M| = \kappa$.

2 $\Rightarrow$ *3*. Sea $M \models T$ y sea $A \subseteq M$ con $|A| = \mu < \kappa$. Sea a una μ-enumeración de A y para cada $p \in S_1(A)$ sea a_p una realización de p, escogida en una extensión elemental de M. Si $p \neq q$ entonces $\mathrm{tp}(a, a_p/\emptyset) \neq \mathrm{tp}(a, a_q/\emptyset)$. Por tanto $|S_1(A)| \leq |S^{\mu+1}(\emptyset)|$. Como dos tipos de secuencias infinitas coinciden si y sólo si coinciden todas sus restricciones a un número finito de variables, tenemos además que $|S_{\mu+1}(\emptyset)| \leq |\bigcup_{n\in\omega} S_n(\emptyset)|^{(\mu+1)^{<\omega}} \leq |\bigcup_{n\in\omega} S_n(\emptyset)|^{\mu} \leq (\kappa \cdot \omega)^{\mu} = \kappa^{\mu} \leq \kappa$.

3 $\Rightarrow$ *1*. La hipótesis $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ implica que κ es regular y que el número de subconjuntos de cardinal $< \kappa$ que tiene un conjunto de cardinal $\leq \kappa$ es $\leq \kappa$. Entonces podemos construir una cadena elemental $(M_i : i < \kappa)$ de modelos M_i de cardinal $\leq \kappa$ consiguiendo que si $A \subseteq M_i$ y $|A| < \kappa$ y $p \in S_1(A)$, entonces p se realiza en M_{i+1}. Como κ es regular, la unión de la cadena es un modelo saturado.

Enunciamos de modo independiente el caso numerable de este teorema:

Corolario 8.14 *Para una teoría completa numerable T son equivalentes:*

1. *T tiene un modelo saturado numerable*
2. *Para cada $n \in \omega$, S_n^T es numerable*
3. *Para cada $M \models T$ y cada $A \subseteq M$ finito, $S_1^M(A)$ es numerable.*

Un criterio que en ocasiones es útil para garantizar la existencia de un modelo saturado numerable es el siguiente:

Corolario 8.15 *Sea T una teoría completa numerable. Si $I(T, \omega) \leq \omega$, es decir, si T sólo tiene una cantidad numerable de modelos numerables no isomorfos, entonces T tiene un modelo saturado numerable.*

Prueba. La hipótesis $I(T, \omega) \leq \omega$ implica que para cada $n \in \omega$, $|S_n^T| \leq \omega$.

El siguiente resultado muestra que los modelos saturados son únicos salvo isomorfía en los cardinales en que existen.

Teorema 8.16 *Si M, N son saturados, $M \equiv N$ y $|M| = |N|$, entonces $M \cong N$.*

Prueba. Sea $M = \{a_i : i < \kappa\}$ y $N = \{b_i : i < \kappa\}$. Construimos una cadena de aplicaciones elementales parciales de M en N, $(f_i : i < \kappa)$, comenzando con $f_0 = \emptyset$ y de modo que $|f_i| < \kappa$, $a_i \in \mathrm{dom} f_{i+1}$ y $b_i \in \mathrm{rec} f_{i+1}$. Para obtener f_{i+1} a partir de f_i, consideramos $p_i = \mathrm{tp}(a_i/\mathrm{dom} f_i)$. Por saturación de N hay $b \in N$ que realiza $p_i^{f_i}$. Entonces $f_i \cup \{(a_i, b)\}$ es elemental. Repitiendo esta operación en sentido inverso se obtiene $c \in M$ para el que $f_{i+1} = f_i \cup \{(a_i, b), (c, b_i)\}$ es elemental. En los límites se toman uniones. Para asegurar que con esas uniones se obtienen aplicaciones de cardinalidad $< \kappa$, conviene concretar que la construcción se hace de modo que $|f_i| \leq 2|i|$. La unión $\bigcup_{i<\kappa} f_i$ de esta cadena de aplicaciones es un isomorfismo entre M y N.

Definición (Homogeneidad y homogeneidad fuerte) Sea κ un cardinal infinito. Un modelo es *κ-homogéneo* si para cada aplicación elemental parcial f de M en M con $|f| < \kappa$ y cada $a \in M$ existe una aplicación elemental parcial $g \supseteq f$ de M en M tal que $a \in \mathrm{dom} g$. Un modelo *homogéneo* es un modelo de cardinal κ que es κ-homogéneo. Por otro lado, decimos que M es *fuertemente κ-homogéneo* si toda aplicación elemental parcial de M en M que tenga cardinalidad $< \kappa$ puede extenderse a un automorfismo de M. El modelo M es *fuertemente homogéneo* si es de cardinal κ y fuertemente κ-homogéneo.

Proposición 8.17 *1. Si M es fuertemente κ-homogéneo, M es κ-homogéneo.*

2. Si M es κ-saturado, M es κ-homogéneo.

3. M es fuertemente homogéneo si y sólo si M es homogéneo.

4. Si $\kappa \geq |L| + \omega$ y M es κ-homogéneo y κ^+-universal, M es κ-saturado. Si $\kappa > |L| + \omega$ basta con κ-homogeneidad y κ-universalidad.

Prueba. *1* es claro. Respecto a *2*, si f es una aplicación elemental parcial de M en M con $|f| < \kappa$ y $a \in M$, entonces $p = \mathrm{tp}(a/\mathrm{dom} f)^f$ debe realizarse en M, y si $b \in M$ es una realización suya, la aplicación $f \cup \{(a, b)\}$ es elemental.

3. Si $M = \{a_i : i < \kappa\}$, y f es una aplicación elemental parcial de M en M con $|f| < \kappa$, aplicando la condición de κ-homogeneidad y comenzando con f, podemos obtener una cadena $(f_i : i < \kappa)$ de aplicaciones elementales parciales de M en M con $|f_i| < \kappa$, $a_i \in \mathrm{dom} f_{i+1}$ y $a_i \in \mathrm{rec} f_{i+1}$. La unión de esta cadena es un automorfismo de M que extiende a f.

4. Sea $A \subseteq M$ con $|A| < \kappa$ y sea $p \in S_1(A)$. Existe un modelo N tal que $A \subseteq N$ y $M_A \equiv N_A$, donde p se realiza, digamos que mediante $a \in N$. Podemos suponer que $\kappa \geq |N|$. Por κ^+-universalidad de M hay una inmersión elemental $f : N \to M$. En el caso $\kappa > |L|$ y M κ-universal, puede suponerse $|N| < \kappa$. En cualquier caso, $f \restriction A$ es una aplicación elemental de M en M y $|f \restriction A| < \kappa$. Por κ-homogeneidad de M hay $b \in M$ para el cual $\{(b, f(a))\} \cup f \restriction A$ es una aplicación elemental parcial de M en M. Entonces b realiza p.

Teorema 8.18 *Si M es un modelo de cardinalidad $\geq |L| + \omega$, M es saturado si y sólo si M es homogéneo y universal.*

Prueba. Por la Proposición 8.17 y la Proposición 8.11.

La existencia de extensiones elementales κ-saturadas y κ-homogéneas está garantizada por el Lema 8.12, pero para obtener extensiones fuertemente κ-homogéneas se necesita un argumento específico. Este resultado también nos da extensiones κ-homogéneas de menor tamaño, por ejemplo, extensiones homogéneas numerables de modelos numerables.

Proposición 8.19 *Sea $\mu \geq |M| + |L| + \omega$ un cardinal tal que $\mu^{<\kappa} = \mu$. Entonces existe $N \succeq M$ de cardinal μ que es fuertemente κ-homogéneo.*

Prueba. El argumento es un refinamiento del presentado en la prueba del Lema 8.8. Existen $\leq \mu$ aplicaciones elementales parciales de M en M que tengan cardinalidad menor que κ y por tanto es fácil obtener $M' \succeq M$ de cardinalidad μ donde todas estas aplicaciones pueden extenderse a un automorfismo. Considérese ahora el conjunto $\mathcal{F}$ formado por las aplicaciones elementales parciales de M' en M' con cardinalidad $< \kappa$ y por los automorfismos de M' asociados a las aplicaciones elementales parciales de M en M con cardinalidad $< \kappa$. Como $|\mathcal{F}| \leq \mu$ podemos obtener ahora $M'' \succeq M'$ de cardinalidad μ donde toda $f \in \mathcal{F}$ puede extenderse a un automorfismo. Esto sugiere cómo construir una cadena elemental $(M_i : i < \mu)$ de modelos de cardinal μ y colecciones de automorfismos $\{\mathcal{F}_i : i < \mu\}$ de modo que cada $\mathcal{F}_i$ es una colección de $\leq \mu$ automorfismos de M_i y cada aplicación elemental parcial de M_i en M_i de cardinalidad $< \kappa$ puede extenderse a un elemento de $\mathcal{F}_{i+1}$ y si $i < j < \mu$, todo elemento de $\mathcal{F}_i$ puede extenderse a un elemento de $\mathcal{F}_j$. En los límites no hay más que tomar las uniones de los modelos y definir la colección de automorfismos de modo que prolonge a todas las anteriores. Sea N la unión de esta cadena. Si f es una aplicación elemental parcial de N en N con $|f| = \lambda < \kappa$, entonces, como $\mu^{\lambda} \leq \mu$, λ es menor que la cofinalidad de μ y por ello f es de hecho una aplicación elemental parcial de M_i en M_i para algún $i < \mu$. Por tanto f puede extenderse a un automorfismo de N.

Corolario 8.20 *Si $|M| \geq |L|+\omega$, M tiene una extensión elemental fuertemente ω-homogénea de su mismo cardinal.*

Finalizaremos mostrando que los modelos homogéneos quedan caracterizados en cada cardinalidad por los n-tipos sobre $\emptyset$ que realizan. Esto generaliza el teorema de unicidad de los modelos saturados (Teorema 8.16).

Lema 8.21 *Sea $M \models T$ un modelo κ-homogéneo. Entonces*

1. *Sea $A \subseteq M$ tal que $|A| < \kappa$ y sea $p \in S_1(A)$. Si para cada $A_0 \subseteq A$ finito, $p \restriction A_0$ se realiza en M, también p se realiza en M.*
2. *Sea $p \in S_I^T$, donde $|I| = \kappa$. Si para cada $I_0 \subseteq I$ finito, $p \restriction I_0$ se realiza en M, también p se realiza en M.*

Prueba. *1.* Hacemos inducción en $|A|$. La hipótesis nos da el resultado para $|A| < \omega$. Sea $|A| = \mu \geq \omega$. Enumeramos $A = \{a_i : i < \mu\}$ y ponemos $A_i = \{a_j : j < i\}$. Así $|A_i| < \mu$ y $A = \bigcup_{i<\mu} A_i$. Por hipótesis inductiva $p \restriction A_i$ se realiza en M, digamos que mediante b_i. Obsérvese que si $i < j$, entonces $\mathrm{tp}(b_i/A_i) = \mathrm{tp}(b_j/A_i)$. Vamos a definir inductivamente una secuencia $(a'_i : i < \mu)$ de modo que

$$\mathrm{tp}(b_0^\frown(a'_j : j < i)/\emptyset) = \mathrm{tp}(b_i^\frown(a_j : j < i)/\emptyset).$$

El caso límite no ofrece dificultades. Consideremos el caso $i + 1$. Tenemos que prolongar $(a'_j : j < i)$ definiendo a'_i. Sabemos que

$$\mathrm{tp}(b_0^\frown(a'_j : j < i)/\emptyset) = \mathrm{tp}(b_{i+1}^\frown(a_j : j < i)/\emptyset)$$

y por κ-homogeneidad obtenemos a'_i con

$$\mathrm{tp}(a'_i b_0^\frown(a'_j : j < i)/\emptyset) = \mathrm{tp}(a_i b_{i+1}^\frown(a_j : j < i)/\emptyset),$$

esto es,

$$\mathrm{tp}(b_0^\frown(a'_j : j < i+1)/\emptyset) = \mathrm{tp}(b_{i+1}^\frown(a_j : j < i+1)/\emptyset).$$

Obtenida así la secuencia $(a'_i : i < \mu)$, aplicando de nuevo la κ-homogeneidad de M se consigue un $b \in M$ tal que

$$\mathrm{tp}(b_0^\frown(a'_i : i < \mu)/\emptyset) = \mathrm{tp}(b^\frown(a_i : i < \mu)/\emptyset),$$

lo cual implica que $b \models p$.

2. Sin perder generalidad, podemos suponer que $I = \kappa$. Definimos inductivamente una secuencia $(a_i : i < \kappa)$ en M de modo que para cada $\alpha < \kappa$, $(a_i : i < \alpha) \models p \restriction \alpha$. En los límites se toma la prolongación de las secuencias previas. Consideremos la obtención de la secuencia de longitud $\alpha + 1$ a partir de $(a_i : i < \alpha)$. Sea $q = q(x_\alpha)$ el resultado de sustituir en $p \restriction \alpha + 1$ las variables $(x_i : i < \alpha)$ por los correspondientes elementos de $(a_i : i < \alpha)$. Queremos realizar q en M para de este modo prolongar $(a_i : i < \alpha)$ añadiendo esta realización al final. Por *(1)* basta con mostrar que para cada $A_0 \subseteq \{a_i : i < \alpha\}$ finito, $q \restriction A_0$ se realiza en M. Sean $i_0 < \cdots < i_n$ los índices de los elementos de A_0. Por hipótesis hay en M una secuencia $(b_{i_0}, \ldots, b_{i_n}, b_\alpha)$ que realiza $p \restriction \{x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}, x_\alpha\}$. Entonces $\mathrm{tp}(b_{i_0}, \ldots, b_{i_n}/\emptyset) = \mathrm{tp}(a_{i_0}, \ldots, a_{i_n}/\emptyset)$ y por ω-homogeneidad hay $b \in M$ tal que $\mathrm{tp}(b_{i_0}, \ldots, b_{i_n}, b_\alpha/\emptyset) = \mathrm{tp}(a_{i_0}, \ldots, a_{i_n}, b/\emptyset)$. De este modo $b \models q \restriction A_0$.

Proposición 8.22 *Sean M, N modelos homogéneos tales que $M \equiv N$ y $|M| = |N|$. Si para cada $n \in \omega$, M y N realizan los mismos n-tipos sobre $\emptyset$, entonces $M \cong N$.*

Prueba. Sean M, N modelos homogéneos elementalmente equivalentes con $|M| = |N| = \kappa$. Sea $M = \{a_i : i < \kappa\}$ y sea $N = \{b_i : i < \kappa\}$. Construimos inductivamente una cadena $(f_i : i < \kappa)$ de aplicaciones elementales parciales f_i de M en N con $|f_i| < \kappa$, de hecho $|f_i| \leq 2|i|$. Comenzamos con la aplicación nula y en los límites tomamos la unión de las aplicaciones previas. Consideremos la obtención de f_{i+1} a partir de f_i. Veamos cómo obtener $b \in N$ para el cual $\{(a_i, b)\} \cup f_i$ es elemental. Nos centramos en esto, pues la simetría de hipótesis permitiría después obtener $a \in M$ para el cual $\{(a, b_i), (a_i, b)\} \cup f_i$ es elemental. Sea $\overline{a}$ una enumeración de $\mathrm{dom} f_i$ y sea $p = \mathrm{tp}(\overline{a} a_i/\emptyset)$. Como M y N realizan los mismos n-tipos sobre $\emptyset$, toda restricción de p a un número finito de variables se realiza en N. Por el lema previo también p se realiza en N. Sea $\overline{c}c$ una tal realización. Entonces $\mathrm{tp}(\overline{c}/\emptyset) = \mathrm{tp}(f_i(\overline{a})/\emptyset)$ y por homogeneidad hay $b \in N$ tal que $\mathrm{tp}(\overline{c}c/\emptyset) = \mathrm{tp}(f_i(\overline{a})b/\emptyset)$. De ello se sigue que $\mathrm{tp}(\overline{a}a_i/\emptyset) = \mathrm{tp}(f_i(\overline{b})b/\emptyset)$ y por tanto que $\{(a_i, b)\} \cup f_i$ es elemental.

Capítulo 9

Ultraproductos

Definición (Filtros y ultrafiltros sobre un conjunto) Un *filtro sobre el conjunto* I es un filtro en el álgebra de Boole $\mathcal{P}(I) = (P(I), \emptyset, I, \cap, \cup, ^{-})$. Análogamente, un *ultrafiltro sobre* I es un ultrafiltro en $\mathcal{P}(I)$.

Observaciones 9.1 *1. Un filtro sobre I es una colección F formada por subconjuntos de I (por tanto $F \subseteq \mathcal{P}(I)$) tal que:*

a) *$I \in F$.*

b) *Si $X, Y \in F$, entonces $X \cap Y \in F$.*

c) *Si $X \in F$, y $X \subseteq Y \subseteq I$, entonces $Y \in F$.*

2. Un filtro F sobre I es propio si y sólo si $F \neq \mathcal{P}(I)$. Equivalentemente, si y sólo si $\emptyset \notin F$.

3. Un ultrafiltro sobre I es un filtro propio U sobre I que cumple las siguientes condiciones, que son todas equivalentes entre sí.

a) *U es maximal entre los filtros propios sobre I.*

b) *Si $X \cup Y \in U$, entonces $X \in U$ o $Y \in U$.*

c) *Para cada $X \subseteq I$, o bien $X \in U$ o bien $I \smallsetminus X \in U$.*

4. Una colección A formada por subconjuntos de I puede extenderse a un filtro propio sobre I si y sólo si tiene la propiedad de la intersección finita, es decir, si y sólo si la intersección de cualquier número finito de elementos de A es no vacía. Si se cumple esta condición hay un menor filtro propio sobre I que contiene a A, se trata del filtro $F = \{X \subseteq I : X$ incluye una intersección finita de elementos de $A\}$.

5. Todo filtro propio sobre I puede extenderse a un ultrafiltro sobre I.

Definición (Productos reducidos y ultraproductos) Sea $(M_i : i \in I)$ una familia de estructuras del mismo tipo de semejanza L y sea F un filtro propio sobre I. Vamos a definir el *producto reducido de la familia $(M_i : i \in I)$ módulo el filtro F*. Se trata de una estructura $\prod_U (M_i : i \in I)$ de lenguaje L que describimos a continuación. Cuando F es un ultrafiltro sobre I se llama *ultraproducto*. Para formar el universo consideramos primero el conjunto

$\prod_{i\in I} M_i$ formado por todas las secuencias $(a_i : i \in I)$ tales que para cada $i \in I$, $a_i \in M_i$. En este conjunto se define una relación $\sim_F$ por

$$(a_i : i \in I) \sim_F (b_i : i \in I) \ \Leftrightarrow\ \{i \in I : a_i = b_i\} \in F.$$

Se trata de una relación de equivalencia. El universo del producto reducido es el cociente $\prod_{i\in I} M_i/\sim_F$. Si $a \in \prod_{i\in I} M_i$ usamos la notación a_F para referirnos a su clase de equivalencia $[a]_{\sim_F}$. La interpretación de los símbolos de L se realiza de acuerdo con los siguientes criterios, que en 2 son independientes de los representantes elegidos,

1. Para cada constante $c \in L$, $c^{\prod_F(M_i:i\in I)} = (c^{M_i} : i \in I)_F$.

2. Para cada símbolo funcional n–ádico $G \in L$ y cualesquiera $a^1, \ldots, a^n \in \prod_{i\in I} M_i$,

$$G^{\prod_F(M_i:i\in I)}(a^1_F, \ldots, a^n_F) = (G^{M_i}(a^1(i), \ldots, a^n(i)) : i \in I)_F.$$

3. Para cada predicado n–ádico $R \in L$,

$$R^{\prod_F(M_i:i\in I)} = \{(a^1_F, \ldots, a^n_F) : \{i \in I : (a^1(i), \ldots, a^n(i)) \in R^{M_i}\} \in F\}.$$

Teorema 9.2 (Teorema de Łoš) *Sea U un ultrafiltro sobre el conjunto I y sea $(M_i : i \in I)$ una familia de L–estructuras.*

1. *Para cada término $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ de L y cualesquiera $a^1, \ldots, a^n \in \prod_{i\in I} M_i$,*

$$t^{\prod_U(M_i:i\in I)}(a^1_U, \ldots, a^n_U) = (t^{M_i}(a^1(i), \ldots, a^n(i)) : i \in I)_U.$$

2. *Para cada fórmula $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L$ y cualesquiera $a^1, \ldots, a^n \in \prod_{i\in I} M_i$,*

$$\prod_U(M_i : i \in I) \models \varphi(a^1_U, \ldots, a^n_U) \ \Leftrightarrow\ \{i \in I : M_i \models \varphi(a^1(i), \ldots, a^n(i))\} \in U.$$

3. *Para cada sentencia σ de L,*

$$\prod_U(M_i : i \in I) \models \sigma \ \leftrightarrow\ \{i \in I : M_i \models \sigma\} \in U.$$

Prueba. El punto *1* se muestra por inducción en t aplicando las definiciones y no ofrece dificultades. El punto *3* se sigue inmediatamente de *2*, que a su vez se prueba por inducción en φ. El caso φ atómica se obtiene fácilmente de las definiciones usando el punto *1*. Consideremos el caso $\neg\varphi$. Sea $X_\varphi = \{i \in I : M_i \models \varphi(a^1(i), \ldots, a^n(i))\}$. Por la hipótesis inductiva tenemos que $\prod_U(M_i : i \in I) \models \varphi(a^1_U, \ldots, a^n_U)$ si y sólo si $X_\varphi \in U$. Como U es un ultrafiltro, $X_\varphi \notin U$ si y sólo si $I \setminus X_\varphi \in U$. De aquí el resultado. Consideremos ahora el caso $\varphi = (\psi \wedge \chi)$. Consideramos los correspondientes conjuntos X_φ, X_ψ y X_χ. Resulta que $X_\varphi = X_\psi \cap X_\chi$ y que, por ser F un filtro, $X_\psi \cap X_\chi \in U$ si y sólo si $X_\psi \in U$ y $X_\chi \in U$. La hipótesis inductiva sobre ψ y χ proporciona entonces el resultado para φ. Consideremos, por último, el caso $\varphi = \exists y \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$. Si existe $b \in \prod_{i\in I} M_i$ tal que $\prod_U(M_i : i \in I) \models \exists y \psi(a^1_U, \ldots, a^n_U, b_U)$ y formamos $X_\psi = \{i \in I : M_i \models \psi(a^1(i), \ldots, a^n(i), b(i)\}$, resulta que $X_\psi \in U$ y que $X_\psi \subseteq X_\varphi$. Como U es un filtro, $X_\varphi \in U$. Para la otra dirección, supongamos que $X_\varphi \in U$. Para cada $i \in X_\varphi$ tenemos que $M_i \models \exists y \psi(a^1(i), \ldots, a^n(i), y)$ y podemos, por tanto, escoger $b_i \in M_i$ tal que $M_i \models \varphi(a^1(i), \ldots, a^n(i), b_i)$. Para $i \in I \setminus X_\varphi$ escogemos $b_i \in M_i$ arbitrario. Definimos entonces el elemento b de $\prod_{i\in I} M_i$ poniendo $b(i) = b_i$ para cada $i \in I$. Formamos de nuevo el correspondiente conjunto $X_\psi = \{i \in I : M_i \models \psi(a^1(i), \ldots, a^n(i), b(i)\}$. Como $X_\varphi \subseteq X_\psi$, también $X_\psi \in U$ y la hipótesis inductiva proporciona entonces el resultado de que $\prod_U(M_i : i \in I) \models \psi(a^1_U, \ldots, a^n_U, b_U)$. Ello implica que $\prod_U(M_i : i \in I) \models \varphi(a^1_U, \ldots, a^n_U)$.

Proposición 9.3 *Sea K una clase de estructuras de lenguaje L.*

1. *K es una clase EC_Δ si y sólo si K está cerrada bajo equivalencia elemental y bajo la formación de ultraproductos.*
2. *K es una clase EC si y sólo si tanto K como su complemento respecto a las clase de las L–estructuras están cerrados bajo equivalencia elemental y ultraproductos.*

Prueba. Como se indicó en **??**, el punto *2* se sigue de *1*. Respecto a *1*, es claro que las clases EC_Δ están cerradas bajo equivalencia elemental y bajo ultraproductos. Para establecer la otra dirección, pongamos $T = \mathrm{Th}(K)$. Tenemos que mostrar que todo modelo de T pertenece a K. Sea $M \models T$. Veremos que M es elementalmente equivalente a un ultraproducto de elementos de K, lo cual implica que $M \in K$ ya que suponemos que K está cerrado bajo equivalencia elemental y ultraproductos. Sea $I = \mathrm{Th}(M)$. Como $M \models T$, para cada $\sigma \in I$ podemos encontrar un $M_\sigma \in K$ tal que $M_\sigma \models \sigma$. Para cada $\sigma \in I$ sea además X_σ la colección de todas las sentencias de $\mathrm{Th}(M)$ de las que la sentencia σ es consecuencia. Entonces $\{X_\sigma : \sigma \in \mathrm{Th}(M)\}$ es una colección de subconjuntos de I y tiene la propiedad de la intersección finita, de modo que puede extenderse a un ultrafiltro U sobre I. Es fácil comprobar que $M \equiv \prod_U(M_\sigma : \sigma \in I)$.

Definición (Ultrapotencia) Si $(M_i : i \in I)$ es una familia de L–estructuras y existe M tal que para cada $i \in I$, $M_i = M$, entonces el ultraproducto $M_U(M_i : i \in I)$ se denomina *ultrapotencia de M módulo U* y se designa con $\prod_U M$ o con M^U.

Proposición 9.4 *Sea U un ultrafiltro sobre el conjunto I. La aplicación $d : M \to \prod_U M$ definida por $d(a) = (a : i \in I)_U$ es una inmersión elemental de M en la ultrapotencia $\prod_U M$.*

Prueba. Sea $\varphi(x) \in L(M)$ y sea $X_\varphi = \{i \in I : M_i \models \varphi(a)\}$. Como $M = M_i$ para cada $i \in I$, resulta que si $X_\varphi \neq \emptyset$, entonces $X_\varphi = I$ y por ello $X_\varphi \in U$. De aquí que $M \models \varphi(a)$ si y sólo si $X_\varphi \in U$ si y sólo si $\prod_U M \models \varphi(d(a))$.

Observación 9.5 *En la práctica se identifica M con su imagen $d(M)$ en la inmersión elemental $d : M \to \prod_U M$ y se supone siempre que una ultrapotencia $\prod_U M$ es una extensión elemental de M.*

Observaciones 9.6 *Sea U un ultrafiltro en el conjunto I y sea $(M_i : i \in I)$ una familia de L-estructuras.*

1. *Para cada $i \in I$ sea $p_i(x)$ un tipo completo sobre $A_i \subseteq M_i$. Si se define $\prod_U(p_i(x) : i \in I)$ como el conjunto de fórmulas $\varphi(x, a^1_U, \ldots, a^n_U)$ tales que $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \in L$,*

$a^1, \ldots, a^n \in \prod_{i\in I} A_i$ y $\{i \in I : \varphi(x, a^1(i), \ldots, a^n(i)) \in p_i(x)\} \in U$, entonces $\prod_U(p_i : i \in I)$ es un tipo completo (en $\prod_U(M_i : i \in I)$) sobre $\prod_U(A_i : i \in I) = \{a_U \in \prod_U(M_i : i \in I) : \{i \in I : a(i) \in A_i\} \in U\}$.

2. *Para cada $i \in I$, sea f_i un automorfismo de M_i. Se define $\prod_U(f_i : i \in I)$ como la aplicación de $\prod_U(M_i : i \in I)$ en $\prod_U(M_i : i \in I)$ que asigna a cada a_U el valor $(f_i(a(i)) : i \in I)_U$. Se trata de un automorfismo del ultrapoducto $\prod_U(M_i : i \in I)$.*

Observación 9.7 *Una de los usos más frecuentes de los ultraproductos consiste en su intervención en una demostración del Teorema de Compacidad. Sea Σ un conjunto de sentencias, sea $I = [\Sigma]^{<\omega}$ y supongamos que para cada $\Delta \in I$ tenemos un modelo M_Δ de Δ. Para cada $\Delta \in I$ sea $X_\Delta = \{\Gamma \in I : \Delta \subseteq \Gamma\}$. Entonces $\{X_\Delta : \Delta \in I\}$ tiene la propiedad de la intersección finita y puede, por ello, extenderse a un ultrafiltro U sobre I. El ultraproducto $\prod_U(M_\Delta : \Delta \in I)$ es un modelo de Σ.*

Definición (Ultrafiltros κ-completos) El ultrafiltro U sobre el conjunto I es *κ–completo* si para cada $A \subseteq U$ con $|A| < \kappa$ se tiene $\bigcap A \in U$. Obviamente, todo ultrafiltro es ω–completo. Se dice que U es *numerablemente incompleto* si no es ω_1–completo.

Lema 9.8 *Sea U un ultrafiltro sobre I. U es numerablemente incompleto si y sólo si existe una familia $(I_i : i < \omega)$ de elementos de U tal que $I_i \supseteq I_{i+1}$ para cada $i < \omega$ y $\bigcap_{i\in\omega} I_i = \emptyset$.*

Prueba. Por un lado es claro que la existencia de esa familia impide que el ultrafiltro pueda ser ω_1–completo. Por otro lado, si $(J_i : i < \omega)$ es una familia de elementos de U tal que $\bigcap_{i<\omega} J_i \notin U$ y ponemos $J'_i = J_i \smallsetminus \bigcap_{i<\omega} J_i$, y finalmente definimos $I_i = \bigcap_{j\leq i} J'_j$, resulta que $I_i \in U$, que $I_i \supseteq I_{i+1}$ y que $\bigcap_{i<\omega} I_i = \emptyset$.

Observación 9.9 *Para cada conjunto I existe un ultrafiltro sobre I que es numerablemente incompleto.*

Prueba. Sea J un subconjunto infinito numerable de I y sea A la colección formada por los subconjuntos cofinitos de J. Esta colección tiene la propiedad de la intersección finita y por ello puede extenderse a un ultrafiltro U sobre I. Obviamente A es numerable y $\bigcap A \notin U$.

Proposición 9.10 *Sea L un lenguaje numerable y sea U un ultrafiltro numerablemente incompleto sobre el conjunto I. Para cualquier familia $(M_i : i \in I)$ de L–estructuras, el ultraproducto $\prod_U(M_i : i \in I)$ es ω_1–saturado.*

Prueba. Sea $A = \{a^n_U : n < \omega\}$ un subconjunto numerable del ultraproducto $N = \prod_U(M_i : i \in I)$. Si $M'_i = (M_i, a^n(i))_{n<\omega}$ resulta que $(N, a^n_U)_{n<\omega} = \prod_U(M'_i : i \in I)$. Por tanto, basta mostrar que N realiza todos los tipos sobre el conjunto vacío. Sea $p(x) = \{\varphi_n(x) : n < \omega\}$ un tipo sobre el conjunto vacío (en $\mathrm{Th}(N)$). Por el Lema 9.8 sabemos que existe una familia $(I_n : n < \omega)$ en U tal que $I_n \supseteq I_{n+1}$ y $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset$. Pongamos

$$X_n = \{i \in I_n : M_i \models \exists x(\varphi_0(x) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(x))\}.$$

Como $N \models \exists x(\varphi_0(x) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(x))$ y $I_n \in U$, usando el Teorema de Łoš vemos que $X_n \in U$. Por otro lado es claro que $X_n \supseteq X_{n+1}$ y que $\bigcap X_n = \emptyset$. Definimos un elemento $a = (a(i) : i \in I)$ de $\prod_{i \in I} M_i$. Si $i \notin X_0$, $a(i) \in M_i$ es arbitrario. Si $i \in X_0$ y $n(i)$ es el mayor número natural para el que $i \in X_{n(i)}$, escogemos en M_i un elemento a_i tal que $M_i \models (\varphi_0(a_i) \wedge \ldots \wedge \varphi_{n(i)}(a_i))$ y ponemos $a(i) = a_i$. De acuerdo con esto, siempre que $i \in X_n$ tenemos que $M_i \models (\varphi_0(a(i)) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(a(i)))$ y como $X_n \in U$, $N \models (\varphi_0(a_U) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(a_U))$. En consecuencia, a_U realiza $p(x)$ en N.

Observación 9.11 *Una consecuencia de la Hipótesis del Continuo es que si $M \equiv N$ son estructuras de cardinal $\leq \omega_1$ y de lenguaje numerable, entonces para cualesquiera ultrafiltros no principales U, V sobre ω, las ultrapotencias $\prod_U M$ y $\prod_V N$ son isomorfas.*

Prueba. Podemos suponer que se trata de estructuras infinitas. Es fácil ver que un ultrafiltro no principal sobre ω es numerablemente incompleto, pues $\bigcap_{i<\omega} \omega \smallsetminus \{i\} = \emptyset$. Por la Proposición 9.9 sabemos entonces que $\prod_U M$ y $\prod_U N$ son ω_1–saturados. La Hipótesis del Continuo implica que son estructuras de cardinal $\leq \omega_1$ y la saturación implica entonces que son de cardinal ω_1. El resultado se sigue entonces del Teorema 8.16.

Definición (Ultrafiltro κ–regular) El ultrafiltro U sobre el conjunto I es *κ–regular* si existe un conjunto $A \subseteq U$ de cardinalidad κ tal que para cada $i \in I$, $\{X \in A : i \in X\}$ es finito.

Lema 9.12 *Un ultrafiltro es ω–regular si y sólo si es numerablemente incompleto.*

Prueba. Sea U un ultrafiltro sobre I. Usamos el Lema 9.8. Si $(I_i : i < \omega)$ es una familia de elementos de U como allí se indica es claro que cada $i \in I$ pertenece a sólo un número finito de elementos de la familia. Por otro lado, si A es el subconjunto de U que define la ω–regularidad es inmediato que $\bigcap A \notin U$.

Proposición 9.13 *Si I es un conjunto de cardinalidad κ, existe un ultrafiltro sobre I que es κ–regular.*

Prueba. Basta ver que para algún conjunto I de cardinal dado κ existe tal ultrafiltro. Sea $I = [\kappa]^{<\omega}$ la colección de los subconjuntos finitos de κ. Para cada ordinal $\alpha < \kappa$ sea $X_\alpha = \{s \in I : \alpha \in s\}$ y sea $A = \{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Para $\alpha < \kappa$ y $s \in I$ tenemos que $s \in X_\alpha$ si y sólo si $\alpha \in s$. Por tanto cada $s \in I$ pertenece sólo a un número finito de elementos de A. Es fácil ver que A tiene la propiedad de la intersección finita y por ello puede extenderse a un ultrafiltro U sobre I, ultrafiltro que necesariamente debe ser κ–regular dado que $A \subseteq U$.

Proposición 9.14 *Si $|L| \leq \kappa$ y U es un ultrafiltro κ–regular, entonces para cada L–estructura M, la ultrapotencia $\prod_U M$ es κ^+–universal.*

Prueba. Sea $N \equiv \prod_U M$ una L–estructura de cardinalidad $\leq \kappa$ y veamos que existe una inmersión elemental de N en $\prod_U M$. Sea D el diagrama elemental de N en $L \cup C$ donde

$C = \{c_a : a \in N\}$ es un conjunto de constantes nuevo. Debemos mostrar que existe una expansión de $\prod_U M$ que satisface D. Como U es un ultrafiltro κ–regular sobre un conjunto I, existe un $A \subseteq U$ de cardinalidad κ tal que cada $i \in I$ pertenece únicamente a un número finito de elementos de A. Fijamos una función inyectiva $f : D \to A$. Definimos a continuación la expansión $(\prod_U M, b^a_U)_{a\in N}$ que satisface D. Fijemos $i \in I$. Vamos a definir $b^a(i)$ para cada $a \in N$. Sea $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ el conjunto (finito) de sentencias σ de D tales que $i \in f(\sigma)$. Sean $\varphi(x) \in L$ y $a_1, \ldots, a_m \in N$ tales que $(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) = \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_m})$. Como N es elementalmente equivalente a $\prod_U M$, existen $b^1, \ldots, b^m \in \prod_{i\in I} M$ tales que $\prod_U M \models \varphi(b^1_U, \ldots, b^m_U)$. Ponemos entonces $b^{a_j}(i) = b^j(i)$ para $1 \leq j \leq m$ y definimos $b^a(i)$ de modo arbitrario para cualquier otro $a \in N$. Para $1 \leq j \leq n$ tenemos que $f(\sigma_j) \in U$ y por el Teorema de Łoš $(\prod_U M, b^a_U)_{a\in N} \models \sigma_j$. La expansión satisface entonces el diagrama elemental D.

Definición (Ultrafiltro κ–bueno) El ultrafiltro U sobre el conjunto I es *κ–bueno* si para cada cardinal $\mu < \kappa$ y cada función $f : [\mu]^{<\omega} \to D$ tal que

$$\forall s, t \in [\mu]^{<\omega}\, (s \subseteq t \Rightarrow f(s) \supseteq f(t))$$

existe una función $g : [\mu]^{<\omega} \to D$ tal que

$$\forall s, t \in [\mu]^{<\omega}\, g(s \cup t) = g(s) \cap g(t)$$

y tal que $g(s) \subseteq f(s)$ para cada $s \in [\kappa]^{<\omega}$.

Proposición 9.15 *Si I es un conjunto de cardinalidad κ, existe un ultrafiltro sobre I que es numerablemente incompleto y es κ^+–bueno.*

Prueba. La argumentación utiliza combinatoria infinita que no se ha desarrollado aquí. Remitimos a [6] para una demostración detallada.

Proposición 9.16 *Sea U un ultrafiltro sobre I que es numerablemente incompleto y κ–bueno. Si $(M_i : i \in I)$ es una familia de L–estructuras y $|L| < \kappa$, entonces el ultraproducto $\prod_U(M_i : i \in I)$ es κ–saturado.*

Prueba. Como en el caso de la Proposición 9.10, es suficiente demostrar que todo tipo $p(x)$ sobre el conjunto vacío se realiza en $N = \prod_U(M_i : i \in I)$. Como U es numerablemente incompleto, existe una familia $(I_n : n < \omega)$ en U tal que $I_n \supseteq I_{n+1}$ para cada $n < \omega$ y $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset$. Sea $\mu = |p(x)|$ y pongamos $p(x) = \{\varphi_j(x) : j < \mu\}$. Definimos $f : [\mu]^{<\omega} \to U$ poniendo

$$f(s) = \{i \in I_{|s|} : M_i \models \exists x \bigwedge_{j\in s} \varphi_j(x)\}.$$

Claramente se cumple que $\forall s, t \in [\mu]^{<\omega}\, (s \subseteq t \Rightarrow f(s) \supseteq f(t))$. Como U es κ–bueno y $\mu < \kappa$, existe $g : [\mu]^{<\omega} \to D$ tal que $\forall s, t \in [\mu]^{<\omega}\, g(s \cup t) = g(s) \cap g(t)$ y tal que $\forall s \in [\mu]^{<\omega}\, g(s) \subseteq f(s)$. Para cada $i \in I$ sea $\Sigma_i = \{\varphi_j(x) : i \in g(\{j\}),\ j < \mu\}$. Mostramos a continuación que cada Σ_i es un conjunto finito. Supongamos que $|\Sigma_i| \geq n$ y concretamente que $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_n} \in \Sigma_i$ son distintas. Entonces $i \in g(\{j_1\}) \cap \ldots \cap g(\{j_n\}) = g(\{j_1, \ldots, j_n\}) \subseteq$

$f(\{j_1, \ldots, j_n\}) \subseteq I_n$, de manera que $i \in I_n$. Como $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset$, Σ_i debe ser finito. Por otro lado

$$i \in \bigcap_{\varphi_j \in \Sigma_i} g(\{j\}) = g(\{j < \mu : \varphi_j \in \Sigma_i\}) \subseteq f(\{j < \mu : \varphi_j \in \Sigma_i\}),$$

de manera que, por definición de f, $M_i \models \exists x \bigwedge \Sigma_i(x)$. Podemos escoger entonces $a_i \in M_i$ tal que $M_i \models \Sigma_i(a_i)$. Si $a = (a_i : i \in I)$ resulta entonces que para cada $j < \mu$, $g(\{j\}) \in U$ y para cada $i \in g(\{j\})$, tenemos que $\varphi_j \in \Sigma_i$ y por tanto $M_i \models \varphi_j(a_i)$. Por el Teorema de Łoš, $\prod_U (M_i : i \in I) \models \varphi_j(a_U)$.

Capítulo 10

Teorías ω-categóricas

Definición (Modelo primo) M es un modelo *primo sobre* $A \subseteq M$ si toda aplicación elemental parcial f de M en un modelo N con $\mathrm{dom} f = A$ puede extenderse a una inmersión elemental de M en N. Un modelo es *primo* si es primo sobre $\emptyset$.

Observación 10.1 *M es primo sobre A si y sólo si para cada modelo $N \supseteq A$ con $M_A \equiv N_A$ existe una inmersión elemental $f : M \to N$ con $f \restriction A = id_A$. Por tanto, M es primo si y sólo si M es elementalmente inmersible en todo modelo $N \equiv M$.*

Definición (Átomo, modelo atómico) Un *átomo* en un álgebra de Boole $\mathbb{B}$ es un elemento no nulo que no puede dividirse en dos elementos no nulos. En términos del orden, $a \in \mathbb{B}$ es un átomo si $a > 0$ y no hay $b \in \mathbb{B}$ tal que $a > b > 0$. Una fórmula $\varphi \in L_n$ es un *átomo* de T si su clase de equivalencia módulo T es un átomo en el álgebra de Boole de Lindenbaum-Tarski $\mathbb{B}^n_T$. Una fórmula $\varphi \in L_n(A)$ es un *átomo sobre* A si es un átomo de $T(A)$. Esto equivale a aislar un tipo sobre A, es decir, a la existencia de un tipo $p \in S^n(A)$ tal que $\varphi \in p$ y $T(A) \cup \{\varphi\} \models p$. Un modelo M es *atómico sobre* $A \subseteq M$ si toda tupla de M tiene tipo aislado sobre A, es decir, satisface un átomo sobre A. M es *atómico* si es atómico sobre $\emptyset$.

Lema 10.2 *Si M es atómico sobre $A \subseteq M$ y $B \subseteq M$ es finito, entonces M es también atómico sobre $A \cup B$*

Prueba. Sea b una tupla que enumera B y sea $a \in M$ una tupla arbitraria. Sabemos que a, b satisface un átomo sobre A, digamos que $\varphi(x, y) \in L(A)$. Entonces $\varphi(x, b)$ es un átomo sobre $A \cup B$ satisfecho por a.

Proposición 10.3 *(1) Si M es atómico sobre $A \subseteq M$ y $M \smallsetminus A$ es numerable, entonces M es primo sobre A.*

(2) Si M es primo sobre $A \subseteq M$ y tanto A como L son numerables, entonces M es atómico sobre A.

(3) Si M, L son numerables y $A \subseteq M$, entonces M es atómico sobre A si y sólo si M es primo sobre A.

Prueba. *(1)*. Sea $M \smallsetminus A = \{ a_i \,:\, i \in \omega \}$ y sea f una aplicación elemental parcial de M en N con dominio A. Definimos inductivamente una cadena de aplicaciones elementales parciales $(f_i : i \in \omega)$ de M en N con $f_0 = f$ y con $\mathrm{dom} f_i = A \cup \{ a_j \,:\, j < i \}$. Para obtener f_{i+1} a partir de f_i observamos que, por el lema previo, $\mathrm{tp}(a_i/\mathrm{dom} f_i)$ es aislado. Entonces también es aislado su conjugado $\mathrm{tp}(a_i/\mathrm{dom} f_i)^{f_i}$ y por tanto se realiza en N. Si $b \in N$ es una realización de ese tipo, la aplicación $f_{i+1} = f_i \cup \{(a_i, b)\}$ es elemental. Obviamente, la unión de esta cadena de aplicaciones es una inmersión elemental de M en N que extiende a f.

(2). Supongamos que $a \in M$ es una tupla que no satisface ningún átomo sobre A. Entonces $p = \mathrm{tp}(a/A)$ es no-aislado y por el teorema de omisión de tipos existe un modelo $N_A \equiv M_A$ que omite p. Como M es primo sobre A, existe una inmersión elemental $f : M \to N$ que es la identidad en A. Pero en ese caso $f(a)$ es una tupla de N que realiza p.

(3). Es consecuencia de los dos puntos previos.

Un álgebra de Boole es atómica si todo elemento no nulo tiene un átomo por debajo. Esta condición equivale a una propiedad topológica del espacio de Stone, a la propiedad de que el conjunto de los puntos aislados sea denso, es decir a que todo conjunto abierto no vacío contenga algún punto aislado.

Proposición 10.4 *Sea T una teoría numerable y completa. Son entonces equivalentes:*

(1) Para cada $n \in \omega$, el conjunto de los puntos aislados de S_n^T es denso.

(2) T tiene un modelo primo.

Prueba. Supongamos que M es un modelo primo de T y sea $\varphi(x) \in L_n$ tal que $T \models \exists x \varphi(x)$. Vemos que el abierto-cerrado $[\varphi]$ de S_n^T determinado por φ contiene un punto aislado. Tenemos una tupla $a \in M$ que satisface $\varphi(x)$. Como M es atómico, $p = \mathrm{tp}(a/\emptyset)$ es aislado. Pero $p \in [\varphi]$, pues $\varphi \in p$. Para demostrar la otra dirección usamos el teorema de omisión de tipos. Sea

$$p_n = \{ \neg\varphi \,:\, \varphi \in L_n \text{ es un átomo de } T \}$$

y sea $P = \{ p_n \,:\, n \in \omega \}$. Como el conjunto de los tipos aislados de S_n^T es denso, p_n es un tipo no-aislado (si es consistente con T). Por tanto P es una colección numerable de tipos no-aislados. Sea M un modelo numerable de T que omite todos los tipos de P. Resulta que M es atómico y, por tanto, primo.

Proposición 10.5 *Si una teoría numerable y completa tiene un modelo numerable saturado, también tiene un modelo primo.*

Prueba. Si T no tiene un modelo primo, para un cierto $n \in \omega$, existe un abierto cerrado en S_n^T que es no vacío pero no contiene puntos aislados. Este abierto-cerrado es homeomorfo al espacio de Cantor y tiene entonces 2^ω puntos. Así pues, $|S_n^T| = 2^\omega$. En ese caso todo modelo ω-saturado de T debe tener cardinalidad $\geq 2^\omega$.

Corolario 10.6 *Sea T una teoría completa y numerable. Si $I(T, \omega) \leq \omega$, entonces T tiene un modelo numerable saturado y tiene un modelo primo.*

Prueba. Por el corolario 8.15 y la proposición 10.5.

Proposición 10.7 *Sean M y L numerables. Si M es primo, entonces M es homogéneo.*

Prueba. Sea f una aplicación elemental parcial finita de M en M y sea $a \in M$. Como M es atómico y $\mathrm{dom} f$ es finito, M es también atómico sobre $\mathrm{dom} f$ y con ello $p = \mathrm{tp}(a/\mathrm{dom} f)$ es aislado. Entonces también es aislado su conjugado p^f y por ello tiene una realización $b \in M$. La aplicación $f \cup \{(a, b)\}$ es elemental.

Proposición 10.8 *Sean A y L numerables. Si M y N son primos sobre A y $M_A \equiv N_A$, entonces $M \cong_A N$.*

Prueba. También M y N deben ser numerables, digamos $M = \{ a_i : i \in \omega \}$ y $N = \{ b_i : i \in \omega \}$. Construimos inductivamente una cadena de aplicaciones elementales $(f_i : i \in \omega)$ de M en N con $f_0 = id_A$, con $f_i \setminus f_0$ finito y con $a_i \in \mathrm{dom} f_{i+1}$ y $b_i \in \mathrm{rec} f_{i+1}$. Consideramos la obtención de f_{i+1} a partir de f_i. Como M es atómico sobre $A = \mathrm{dom} f_0$ y $f_i \setminus f_0$ es finito, M es también atómico sobre $\mathrm{dom} f_i$. Sea $p = \mathrm{tp}(a_i/\mathrm{dom} f_i)$. Es un tipo aislado y también lo es su conjugado p^{f_i}. Por tanto existe en N una realización b de p^{f_i}. Es claro que $f_i \cup \{(a_i, b)\}$ es elemental. De modo análogo se obtiene a continuación $a \in M$ para el que $f_{i+1} = f_i \cup \{(a, b_i), (a_i, b)\}$ es elemental. Claramente la unión de esta cadena de aplicaciones es un isomorfismo entre M y N y es la identidad en A.

Sea $\mathbb{B}$ un álgebra de Boole y sea S su espacio de Stone. La condición de que $\mathbb{B}$ sea finita es equivalente a la finitud de S y también a que todo punto de S sea aislado. Esto proporciona otras lecturas al siguiente resultado.

Teorema 10.9 (Teorema de Ryll-Nardzewski) *Las siguientes condiciones son equivalentes para T completa y numerable:*

(1) T es ω-categórica.

(2) Para cada $n \in \omega$, $|S_n^T| < \omega$.

(3) Para cada A finito y $n \in \omega$, $|S_n(A)| < \omega$.

(4) Para cada A finito, $|S_1(A)| < \omega$.

Prueba. *(1) ⇒ (2)* Como el número de modelos numerables no isomorfos de T es numerable, por la proposición 10.6, T tiene un modelo primo. Así pues, el modelo numerable M de T es primo y por ello atómico. Pero todo tipo $p \in S_n^T$ se realiza en M, y todo tipo sobre $\emptyset$ realizado en M es aislado. El espacio S_n^T está formado por puntos aislados y es por ello finito.

(2) ⇒ (3). Pues si $|A| = n$, es fácil ver que $|S_m(A)| \leq |S_{n+m}^T|$.

(3) ⇒ (4) es claro.

(4) ⇒ (1) . La hipótesis implica que para cada A finito todo $p \in S_1(A)$ es aislado. Ello implica que todo modelo numerable es saturado y, por tanto, que salvo isomorfía hay un sólo modelo numerable.

Corolario 10.10 *Si A es finito y T es una teoría completa numerable, entonces T es ω-categórica si y sólo si $T(A)$ es ω-categórica.*

Prueba. Sea T ω-categórica. Entonces todo modelo numerable de T es saturado. Como A es finito, también todo modelo numerable de $T(A)$ es saturado, lo cual implica la ω-categoricidad de T. La otra dirección se obtiene del teorema de Ryll-Nardzewski, pues $S^{T(A)}(B) = S^T(A \cup B)$.

Proposición 10.11 *Si T es una teoría numerable y completa, $I(T, \omega) \neq 2$, es decir, el número de modelos numerables no isomorfos de T no puede ser 2.*

Prueba. Supongamos que $I(T, \omega) = 2$. Como $I(T, \omega) \leq \omega$, por la proposición 10.6, T tiene un modelo numerable saturado M_1 y un modelo primo M_0. Si fuera $M_0 \cong M_1$, por el teorema de Ryll-Nardzewski, T sería ω-categórica, pues todo tipo sobre $\emptyset$ sería aislado. Así pues, M_0 y M_1 son, salvo isomorfía, los dos modelos numerables de T. Como M_1 no es atómico, hay una tupla $a \in M_1$ con $\mathrm{tp}(a/\emptyset)$ no-aislado. También $(M_1, \overline{a})$ es saturado. Como $T(a)$ tiene un modelo numerable saturado, tiene un modelo primo, es decir, existe un modelo $M_{1/2}$ de T que es primo sobre a. Este modelo contiene una tupla cuyo tipo sobre $\emptyset$ no es aislado y por ello no es un modelo primo, esto es, $M_{1/2} \not\cong M_0$. Veremos ahora que $M_{1/2}$ tampoco puede ser isomorfo a M_1. Supongamos lo contrario. Entonces $(M_{1/2}, a)$ es no sólo primo sino también saturado. Ello implica que todos los tipos sobre $\emptyset$ de $T(a)$ son aislados y, por el teorema de Ryll-Nardzewski, que $T(a)$ es ω-categórica. Por el corolario 8.9, también T debe ser ω-categórica, lo cual es una contradicción.

Proposición 10.12 *Si T es una teoría numerable y ω-categórica, para cada conjunto finito A existe un modelo primo sobre A.*

Prueba. También $T(A)$ es ω-categórica y por ello $T(A)$ tiene un modelo primo.

Capítulo 11

Isomorfía parcial

Definición (Isomorfía parcial) Sean M, N modelos de tipo L. Un *isomorfismo parcial* de M en N es una aplicación inyectiva f con $\mathrm{dom} f \subseteq M$ y $\mathrm{rec} f \subseteq N$ que cumple las siguientes condiciones:

1. Si $R \in L$ es un predicado n-ádico y $a \in \mathrm{dom} f$ es una n-tupla, entonces $a \in R^M$ si y sólo si $f(a) \in R^N$,
2. si $F \in L$ es un símbolo de función n-ádico, $a \in \mathrm{dom} f$ es una n-tupla y $b \in \mathrm{dom} f$, entonces $F^M(a) = b$ si y sólo si $F^N(f(a)) = f(b)$,
3. si $c \in L$ es una constante y $a \in \mathrm{dom} f$, entonces $c^M = a$ si y sólo si $c^N = f(a)$.

Decimos que M y N son *parcialmente isomorfos via* I y escribimos $I : M \cong_p N$ si I es una colección no vacía de isomorfismos parciales de M en N con las siguientes propiedades

1. Si $f \in I$ y $a \in M$, existe $g \in I$ tal que $a \in \mathrm{dom} g$ y $f \subseteq g$,
2. Si $f \in I$ y $b \in N$, existe $g \in I$ tal que $b \in \mathrm{rec} g$ y $f \subseteq g$.

Finalmente, decimos que M y N son *parcialmente isomorfos* y escribimos $M \cong_p N$ si para algún conjunto I, $I : M \cong_p N$.

Observaciones 11.1 *(1) Si $M \cong N$, entonces $M \cong_p N$.*

(2) Si M, N son numerables y $M \cong_p N$, entonces $M \cong N$.

Prueba. *(1).* Si $f : M \to N$ es un isomorfismo y ponemos $I = \{f\}$, resulta que $I : M \cong_p N$.

(2). Sea $M = \{ a_i : i \in \omega \}$ y $N = \{ b_i : i \in \omega \}$ y sea $I : M \cong_p N$. Definimos inductivamente una cadena de aplicaciones $(f_i : i \in \omega)$ tales que $f_i \in I$, $a_i \in \mathrm{dom} f_{i+1}$ y $b_i \in \mathrm{rec} f_{i+1}$. Supuesto ya obtenido $f_i \in I$, observamos que hay $g \in I$ tal que $a_i \in \mathrm{dom} g$ y $f_i \subseteq g$ y a continuación que hay $f_{i+1} \in I$ tal que $b_i \in \mathrm{rec} f_{i+1}$ y $g \subseteq f_{i+1}$. La unión de esta cadena es un isomorfismo entre M y N.

Definición ($\mathcal{L}_{\infty\omega}$) La lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es una extensión de la lógica de primer orden que se obtiene permitiendo efectuar conjunciones (y por tanto disyunciones) de cualquier conjunto de fórmulas, por grande que sea. Las fórmulas de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ se construyen entonces a partir de las atómicas mediante negaciones y cuantificación, como en primer orden, y admitiendo además que para cualquier conjunto Σ de fórmulas ya construido, $\bigwedge\Sigma$ (y $\bigvee\Sigma$) es una fórmula. Obsérvese que las fórmulas de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ en un tipo de semejanza dado no forman un conjunto sino que constituyen una clase propia. La semántica es la natural: la fórmula $\bigwedge\Sigma$ es verdadera en una estructura bajo una interpretación de las variables cuando todas las fórmulas de Σ lo son y la fórmula $\bigvee\Sigma$ es verdadera cuando alguna fórmula de Σ lo es. Si M y N son dos modelos, ponemos $M \equiv_{\infty\omega} N$ para indicar que son $\mathcal{L}_{\infty\omega}$-equivalentes, es decir, que satisfacen las mismas sentencias de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$.

Teorema 11.2 (Karp) *$M \cong_p N$ si y sólo si $M \equiv_{\infty\omega} N$.*

Prueba. $\Rightarrow$. Sea $I : M \cong_p N$. Obsérvese primero que si $f \in I$, $a \in \mathrm{dom} f$ es una tupla y $t(x)$ es un término, entonces existe $g \in I$ tal que $f \subseteq g$, $t^M(a) \in \mathrm{dom} g$ y $g(t^M(a)) = t^N(g(a))$. A continuación se muestra por inducción en φ que si $\varphi = \varphi(x)$ es una fórmula de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ y $f \in I$ y $a \in \mathrm{dom} f$ es una tupla, entonces

$$M \models \varphi(a) \text{ si y sólo si } N \models \varphi(f(a)).$$

$\Leftarrow$. Digamos que una aplicación f con $\mathrm{dom} f \subseteq M$ y $\mathrm{rec} f \subseteq N$ es una (∞, ω)-aplicación parcial de M en N si para cada tupla $\overline{a} \in \mathrm{dom} f$ y cada fórmula $\varphi = \varphi(x)$ de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, se tiene que $M \models \varphi(a)$ si y sólo si $N \models \varphi(f(a))$, es decir, $(M, a) \equiv_{\infty\omega} (N, f(a))$. Sea I el conjunto de todas las (∞, ω)-aplicaciones parciales finitas de M en N. Por hipótesis la aplicación nula está en I y por tanto $I \neq \emptyset$. Veamos que $I : M \cong_p N$. Por simetría podemos limitarnos a establecer que si $f \in I$ y $a \in M$, existe $g \in I$ tal que $f \subseteq g$ y $a \in \mathrm{dom} g$. Consideremos tal $f \in I$ y tal $a \in I$, y sea $\overline{a}$ una enumeración de $\mathrm{dom} f$. Supongamos que para ningún $b \in N$, $f \cup \{(a, b)\}$ es una (∞, ω)-aplicación. Entonces para cada $b \in N$ podemos encontrar una fórmula $\varphi_b(\overline{x}, x)$ de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ tal que $M \models \varphi_b(\overline{a}, a)$ pero $N \not\models \varphi_b(f(\overline{a}), b)$. Consideremos entonces la fórmula de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, $\psi = \bigwedge_{b \in N} \varphi_b(\overline{x}, x)$. Resulta que $M \models \exists x \psi(\overline{a}, x)$ pero $N \models \neg\exists x \psi(f(\overline{a}), x)$, lo cual contradice el hecho de que $f \in I$.

Corolario 11.3 *Si $I : M \cong_p N$ y $f \in I$, entonces f es una aplicación elemental parcial de M en N.*

Prueba. Como la dirección $\Rightarrow$ en la prueba de la proposición 11.2.

Proposición 11.4 *Si M, N son ω-saturados y $M \equiv N$, entonces $M \cong_p N$. Por tanto, una teoría T es completa si y sólo si todos sus modelos ω-saturados son parcialmente isomorfos.*

Prueba. La segunda afirmación es consecuencia de la primera porque todo modelo puede extenderse elementalmente a un modelo ω-saturado. Respecto a la primera afirmación, sea I el conjunto de las aplicaciones elementales parciales finitas de M en N y veamos que $I : M \cong_p N$. La hipótesis $M \equiv N$ implica que la aplicación nula es elemental y por ello que $I \neq \emptyset$. Por simetría basta ver que si $f \in I$ y $a \in M$, existe $g \in I$ tal que $f \subseteq g$ y $a \in \mathrm{dom} g$. Sea $p = \mathrm{tp}(a/\mathrm{dom} f)$. Como N es ω-saturado, existe $b \in N$ que realiza p^f. La aplicación

$f \cup \{(a, b)\}$ es entonces elemental.

En ocasiones podemos mostrar que no sólo los modelos ω-saturados son parcialmente isomorfos, sino que todos los modelos de la teoría lo son. Ello da algo más que completud, da ω-categoricidad.

Proposición 11.5 *Si T es una teoría consistente numerable y todos sus modelos son infinitos, entonces T es ω-categórica si y sólo si todos los modelos de T son parcialmente isomorfos.*

Prueba. $\Rightarrow$. Por la proposición 11.4 dado que todos los modelos de T son ω-saturados.

$\Leftarrow$. Por la observación 11.1.

Definición (Eliminación de cuantificadores, tipo atómico) T *elimina los cuantificadores* o *admite eliminación de cuantificadores* si para cada $n \geq 1$ y cada $\varphi \in L_n$ existe $\psi \in L_n$ sin cuantificadores tal que $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$. El *tipo atómico* de una tupla a sobre un conjunto A, $\mathrm{atp}(a/A)$ está formado por las fórmulas sin cuantificación de $\mathrm{tp}(a/A)$. Obsérvese que para verificar que $\mathrm{atp}(a/A) = \mathrm{atp}(b/A)$ basta establecer que a y b satisfacen las mismas fórmulas atómicas de $L(A)$.

Proposición 11.6 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) T es una teoría completa que admite eliminación de cuantificadores,

(2) para cualesquiera modelos ω-saturados M, N de T se tiene $I : M \cong_p N$ para el conjunto I formado por todos los isomorfismos parciales de M en N cuyo dominio es una subestructura de M finitamente generada,

(3) para cualesquiera modelos ω-saturados M, N de T se tiene $I : M \cong_p N$ para el conjunto I formado por todos los isomorfismos parciales de M en N de la forma (a, b), donde a, b son tuplas con $\mathrm{atp}(a/\emptyset) = \mathrm{atp}(b/\emptyset)$.

Prueba. *(2)* $\Leftrightarrow$ *(3)*. Sea I_2 el conjunto definido en *(2)* y I_3 el definido en *(3)*. Como I_3 está formado por los subconjuntos finitos de los elementos de I_2, tenemos que $I_2 : M \cong_p N$ implica $I_3 : M \cong_p N$. Como todo elemento de I_3 se puede extender a algún elemento de I_2 y además todo elemento de I_2 está generado por un elemento de I_3, tenemos que si $I_3 : M \cong_p N$, entonces $I_2 : M \cong_p N$.

(1) $\Rightarrow$ *(3)*. Como la prueba de la proposición 11.4, dado que la eliminación de cuantificadores garantiza que si a, b son tuplas de longitud ≥ 1 y $\mathrm{atp}(a/\emptyset) = \mathrm{atp}(b/\emptyset)$, entonces $\mathrm{tp}(a/\emptyset) = \mathrm{tp}(b/\emptyset)$. Para justificar que $I \neq \emptyset$ tomamos $a \in M$ arbitrario y por ω-saturación de N se obtiene $b \in N$ con $\mathrm{tp}(a/\emptyset) = \mathrm{tp}(b/\emptyset)$, en cuyo caso $(a, b) \in I$.

(3) $\Rightarrow$ *(1)*. La completud se tiene por la proposición 11.4. Respecto a la eliminación de cuantificadores, por *(3)* y por el corolario 11.3, tenemos que para cada tupla a, $\mathrm{atp}(a/\emptyset) \vdash \mathrm{tp}(a/\emptyset)$. Sea $n \geq 1$ y $\varphi = \varphi(x) \in L_n$, y veamos que existe $\psi \in L_n$ sin cuantificadores tal que $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$. Sea $\Psi(x)$ el conjunto de todas las fórmulas sin cuantificadores $\psi(x) \in L_n$ tales que $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Por compacidad, basta ver que $T \cup \Psi(x) \vdash \varphi(x)$. Si esto no fuera así tendríamos en un modelo $M \models T$ una tupla a tal que $M \models \Psi(a)$ pero $M \models \neg\varphi(a)$.

Si $p(x) = \mathrm{atp}(x/\emptyset)$ resulta entonces que tanto $T \cup p(x) \cup \{\varphi(x)\}$ como $T \cup p(x) \cup \{\neg\varphi(x)\}$ es consistente. Pero en ese caso hay dos tuplas en un modelo ω-saturado de T que tienen el mismo tipo atómico sobre $\emptyset$ pero una satisface φ y la otra $\neg\varphi$, lo cual es una contradicción.

Proposición 11.7 *Las siguientes condiciones son equivalentes para una teoría consistente y numerable T todos cuyos modelos son infinitos:*

(1) T es una teoría ω-categórica que admite eliminación de cuantificadores,

(2) para cualesquiera modelos M, N de T se tiene $I : M \cong_p N$ para el conjunto I formado por todos los isomorfismos parciales de M en N cuyo dominio es una subestructura de M finitamente generada,

(3) para cualesquiera modelos M, N de T se tiene $I : M \cong_p N$ para el conjunto I formado por todos los isomorfismos parciales de M en N de la forma (a, b), donde a, b son tuplas con $\mathrm{atp}(a/\emptyset) = \mathrm{atp}(b/\emptyset)$.

Prueba. Por las proposiciones 11.5 y 11.6, dado que todos los modelos de una teoría numerable ω-categórica son ω-saturados.

Definición (Isomorfía finita) Sea $(I_i : i \leq n)$ una familia de conjuntos no vacíos de isomorfismos parciales de M en N. Decimos que M y N son *n-isomorfos via* $(I_i : i \leq n)$ y escribimos $(I_i : i \leq n) : M \cong_n N$ si se cumplen las dos siguientes condiciones:

1. Si $i < n$, $f \in I_{i+1}$ y $a \in M$, existe $g \in I_i$ tal que $a \in \mathrm{dom} g$ y $f \subseteq g$,
2. Si $i < n$, $f \in I_{i+1}$ y $b \in N$, existe $g \in I_i$ tal que $a \in \mathrm{rec} g$ y $f \subseteq g$.

Decimos que M y N son *n-isomorfos* y escribimos $M \cong_n N$ si para alguna familia $(I_i : i \leq n)$ se tiene $(I_i : i \leq n) : M \cong_n N$. Obsérvese que si M, N son modelos de tamaño n y $M \cong_n N$, entonces $M \cong N$.

Definición (Grado cuantificacional) Sea L un tipo de semejanza. Definimos el *grado cuantificacional* $\mathrm{qr}(t)$ y $\mathrm{qr}(\varphi)$ de un término t y de una fórmula φ de L como sigue:

1. para cada variable x, $\mathrm{qr}(x) = 0$,
2. para cada constante $c \in L$, $\mathrm{qr}(c) = 1$,
3. para cada símbolo funcional m-ádico $F \in L$ y cada m-tupla $t_1, \ldots, t_m$ de términos de L, $\mathrm{qr}(Ft_1, \ldots, t_m) = 1 + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{qr}(t_i)$,
4. para cada ecuación $t_1 = t_2$, de L, $\mathrm{qr}(t_1 = t_2) = \mathrm{qr}(t_1) + \mathrm{qr}(t_2) \dot{-} 1$,
5. para cada predicado m-ádico $P \in L$ y cada m-tupla $t_1, \ldots, t_m$ de términos de L, $\mathrm{qr}(Pt_1, \ldots, t_m) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{qr}(t_i)$,
6. $\mathrm{qr}(\neg\varphi) = \mathrm{qr}(\varphi)$,
7. $\mathrm{qr}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{máx}\{\mathrm{qr}(\varphi), \mathrm{qr}(\psi)\}$,

8. $\mathrm{qr}(\exists x\varphi) = 1 + \mathrm{qr}(\varphi)$.

Si para cada sentencia σ con $\mathrm{qr}(\sigma) \leq n$ se tiene $M \models \sigma$ si y sólo si $N \models \sigma$, ponemos $M \equiv_n N$. Obsérvese que $M \equiv N$ equivale a que para todo $n \in \omega$, $M \equiv_n N$.

Lema 11.8 *Sea $(I_i : i \leq n) : M \cong_n N$.*

(1) Sea t un término con $\mathrm{qr}(t) = m \leq n$, sea $f \in I_n$ y $a \in \mathrm{dom} f$ una tupla. Entonces hay $g \in I_{n-m}$ tal que $t^M(a) \in \mathrm{dom} g$, $f \subseteq g$ y $g(t^M(a)) = t^N(g(a))$.

(2) Sea $\varphi = \varphi(\overline{x})$ una fórmula con $\mathrm{qr}(\varphi) \leq n$, sea $f \in I_n$ y $a \in \mathrm{dom} f$ una tupla. Entonces $M \models \varphi(a)$ si y sólo si $N \models \varphi(f(a))$.

Prueba. Inducción en t y en φ. Sólo el caso de una ecuación requiere una pequeña reflexión.

Teorema 11.9 (Fraïssé) *(1) Si $M \cong_n N$, entonces $M \equiv_n N$.*

(2) Si M es un modelo de tipo de semejanza finito L y $n \in \omega$, existe una sentencia σ^n_M con $\mathrm{qr}(\sigma^n_M) \leq n$ y tal que para cada N, $N \models \sigma^n_M$ si y sólo si $M \cong_n N$.

(3) Si M, N son modelos de tipo de semejanza finito y $M \equiv_n N$, entonces $M \cong_n N$.

Prueba. *(1)* se obtiene del lema 11.8 y *(3)* se sigue de *(2)*. Para establecer *(2)* definimos inductivamente para cada $n, m \in \omega$ y cada m-tupla $a \in M$ una fórmula $\varphi^n_{M,a} \in L_m$ con $\mathrm{qr}(\varphi^n_{M,a}) \leq n$. Al tiempo que se define se observa que para cada n y m el conjunto $\{\varphi^n_{M,a} : a \in M^m\}$ es finito. Para empezar, es finito el conjunto Φ_m formado por las fórmulas de L_m de la forma $Px_1 \dots x_k$, $Fx_1 \dots x_k = y$, $x = c$, $x = y$ y sus negaciones. Si $\overline{a}$ es una m-tupla, definimos $\varphi^0_{M,\overline{a}}$ como la conjunción del conjunto de las fórmulas de Φ_m que son satisfechas por $\overline{a}$ en M. Procediendo de modo inductivo definimos a continuación $\varphi^{n+1}_{M,\overline{a}}$ como la fórmula

$$\forall x_m \bigvee_{a \in M} \varphi^n_{M,\overline{a}a} \wedge \bigwedge_{a \in M} \exists x_m \varphi^n_{M,\overline{a}a}.$$

Finalmente ponemos $\sigma^n_M = \varphi^n_{M,\emptyset}$. Sea $N \models \sigma^n_M$. Si definimos $(I_i : i \leq n)$ de modo que I_i esté formado por las aplicaciones de la forma (a, b), donde a es una tupla de M y $N \models \varphi^i_{M,a}(b)$, resulta que $(I_i : i \leq n) : M \cong_n N$.

Corolario 11.10 *Si M, N son modelos de tipo de semejanza L, entonces $M \equiv N$ si y sólo si para cada $L_0 \subseteq L$ finito y cada $n \in \omega$, $M \restriction L_0 \cong_n N \restriction L_0$*

Prueba. Es consecuencia inmediata del teorema previo.

Definición ($\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$) La lógica $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ se obtiene a partir de la lógica de primer orden permitiendo efectuar conjunciones (y por tanto disyunciones) de cualquier conjunto numerable de fórmulas. Las fórmulas de $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ se construyen a partir de las atómicas mediante negaciones y cuantificación, como en primer orden, y admitiendo además que para cualquier conjunto numerable Σ de fórmulas ya construido, $\bigwedge \Sigma$ (y $\bigvee \Sigma$) es una fórmula. La fórmula

$\bigwedge \Sigma$ es verdadera en una estructura bajo una interpretación de las variables cuando todas las fórmulas de Σ lo son y la fórmula $\bigvee \Sigma$ es verdadera cuando alguna fórmula de Σ lo es. Si M y N son dos modelos, ponemos $M \equiv_{\omega_1\omega} N$ para indicar que son $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$-equivalentes, es decir, que satisfacen las mismas sentencias de $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$.

Teorema 11.11 (Scott) *Sea M un modelo numerable de tipo de semejanza numerable. Existe una sentencia σ_M de $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ tal que para cada N, $N \models \sigma_M$ si y sólo si $M \cong_p N$. Si N es numerable resulta entonces que $N \models \sigma_M$ si y sólo si $M \cong N$. Por tanto, para modelos numerables de tipo de semejanza numerable $M \equiv_{\omega_1\omega} N$ si y sólo si $M \cong N$.*

Prueba. Definimos inductivamente para cada ordinal $i < \omega_1$, cada $n \in \omega$ y cada n-tupla $a \in M$ una fórmula $\varphi^i_{M,a}$ de $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ con a lo sumo las variables $x_0, \dots, x_{n-1}$ libres. Si $n \in \omega$ y $\overline{a}$ es una n-tupla de M, definimos $\varphi^0_{M,\overline{a}}$ como la conjunción de las fórmulas de primer orden $\psi \in L_n$ sin cuantificadores que $\overline{a}$ satisface en M. La fórmula $\varphi^{i+1}_{M,\overline{a}}$ se define como

$$\forall x_n \bigvee_{a\in M} \varphi^i_{M,\overline{a}a} \;\wedge\; \bigwedge_{a\in M} \exists x_n \varphi^i_{\overline{a}a}$$

y si $i < \omega_1$ es un límite, definimos $\varphi^i_{M,\overline{a}}$ como

$$\bigwedge_{j<i} \varphi^j_{M,\overline{a}}.$$

Es claro que si $i < j < \omega_1$, entonces $M \models (\varphi^j_{M,\overline{a}} \to \varphi^i_{M,\overline{a}})$. Como M es numerable para cada $\overline{a} \in M$ existe entonces un $i < \omega_1$ tal que para todo $j < \omega_1$, $M \models (\varphi^i_{M,\overline{a}} \to \varphi^j_{M,\overline{a}})$. Usando de nuevo la numerabilidad de M vemos que existe un $i < \omega_1$ tal que para cada tupla $\overline{a} \in M$ y cada $j < \omega_1$, $M \models (\varphi^i_{M,\overline{a}} \to \varphi^j_{M,\overline{a}})$. Definimos entonces σ_M como la sentencia

$$\varphi^i_{M,\emptyset} \;\wedge \bigwedge_{n\in\omega,\,\overline{a}\in M^n} \forall x_0 \dots x_{n-1}(\varphi^i_{M,\overline{a}} \to \varphi^{i+1}_{M,\overline{a}}).$$

Sea $N \models \sigma_M$. Definimos I como el conjunto de las aplicaciones de la forma (a, b), donde a es una tupla de M y $N \models \varphi^i_{M,a}(b)$. Como $N \models \varphi^i_{M,\emptyset}$, la aplicación nula está en I y con ello $I \neq \emptyset$. Es fácil ver que $I : M \cong_p N$.

Capítulo 12

Indiscernibles

Definición (Funciones de Skolem) La teoría T de tipo de semejanza L *tiene funciones de Skolem* o está *Skolemizada* si para cada $n \in \omega$ y cada $\varphi \in L_{n+1}$ existe un término $t(x_0, \ldots, x_{n-1})$ tal que

$$T \models \forall x_0 \ldots x_{n-1}(\exists x_n \varphi(x_0, \ldots, x_n) \rightarrow \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, t(x_0, \ldots, x_{n-1}))).$$

Proposición 12.1 *Para cada teoría T de tipo de semejanza L existe $L^{SK} \supseteq L$ con $|L^{SK}| = |L| + \omega$ y existe una teoría $T^{SK} \supseteq T$ de tipo de semejanza L^{SK} tal que T^{SK} tiene funciones de Skolem y todo modelo de T puede expandirse a un modelo de T^{SK}.*

Prueba. Obsérvese primero que existe un tipo de semejanza $L' \supseteq L$ y una teoría $T' \supseteq T$ tal que $|L'| = |L| + \omega$, todo modelo de T posee una expansión a T' y T' tiene funciones de Skolem para L, es decir para cada $\varphi(x, y)$ de L existe un término $t(x)$ de L' para el que $T' \models \forall x(\exists y \varphi(x, y) \rightarrow \varphi(x, t(x)))$. Esta extensión se obtiene introduciendo símbolos funcionales $F_\varphi(x, y)$ asociados a las fórmulas $\varphi(x, y)$ de L y añadiendo los axiomas

$$\forall x(\exists y \varphi(x, y) \rightarrow \varphi(x, F_{\varphi(x,y)}(x))).$$

Iterando este procedimiento ω veces se obtienen L^{SK} y T^{SK}.

Proposición 12.2 *Si T tiene funciones de Skolem, T es modelo completa. Además todo submodelo de un modelo de T es también modelo de T.*

Prueba. Es una aplicación del test de Tarski.

Definición (Indiscernibles) Sea $(I, <)$ un orden total. Decimos que dos n-tuplas $(i_1, \ldots, i_n)$ y $(j_1, \ldots, j_n)$ de elementos de I están ordenadas de la misma manera si para cualesquiera $k, l \in \{1, \ldots, n\}$, $i_k < i_l$ si y sólo si $j_k < j_l$. Sea $(a_i : i \in I)$ una secuencia de elementos de un modelo M y sea $A \subseteq M$. Decimos que la secuencia es *indiscernible sobre A* si para cada n y cualesquiera n-tuplas $\bar{i}, \bar{j} \in I$ ordenadas de la misma manera se tiene que $\mathrm{tp}(a_{\bar{i}}/A) = \mathrm{tp}(a_{\bar{j}}/A)$, donde $a_{\bar{i}} = a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ si $\bar{i} = (i_1, \ldots, i_n)$. Esto equivale a decir que $\mathrm{tp}(a_{\bar{i}}/A) = \mathrm{tp}(a_{\bar{j}}/A)$ para cualesquiera n-tuplas crecientes $\bar{i}, \bar{j}$ de I, donde la tupla

$\bar{i} = (i_1, \ldots, i_n)$ es creciente si $i_1 < \cdots < i_n$. Decimos que la secuencia es *indiscernible* si es indiscernible sobre el conjunto vacío. Si la secuencia $(a_i : i \in I)$ es indiscernible, entonces o bien no tiene repeticiones o bien es constante. En ese último caso se dice que es *trivial*.

Sea A un conjunto y κ un cardinal. Mediante $[A]^\kappa$ nos referimos a la colección formada por los subconjuntos de A que tienen κ elementos. Si $f : [A]^\kappa \to B$, decimos que un subconjunto $X \subseteq A$ es homogéneo respecto a f si f es constante en $[X]^\kappa$, es decir, si existe un $b \in B$ tal que para cada $a \in [X]^\kappa$, $f(a) = b$. La notación

$$\lambda \to (\mu)^\kappa_\nu$$

significa que si A es un conjunto de cardinalidad λ y B es un conjunto de cardinalidad ν y $f : [A]^\kappa \to B$, entonces existe un $X \subseteq A$ de cardinalidad μ que es homogéneo para f. Dicho en otros términos, si $(A_i : i < \nu)$ es una partición de $[A]^\kappa$, existe $X \subseteq A$ de cardinalidad μ y existe $i < \nu$ tal que $[X]^\kappa \subseteq A_i$. El teorema de Ramsey establece que para cualesquiera $n, m \in \omega$, $\omega \to (\omega)^n_m$. La manera más frecuente de obtener modelos con indiscernibles es aplicar el teorema de Ramsey.

Proposición 12.3 *Para cada teoría con modelos infinitos T y cada orden total $(I,<)$ existe un modelo de T en el que hay una secuencia no trivial $(a_i : i \in I)$ de indiscernibles.*

Prueba. Sea $C = \{c_i : i \in I\}$ un conjunto de constantes nuevas. Si $\bar{i}, \bar{j}$ son dos n-tuplas crecientes de elementos de I y $\varphi \in L_n$, mediante $\varphi_{\bar{i},\bar{j}}$ nos referimos a la fórmula $(\varphi(c_{\bar{i}}) \leftrightarrow \varphi(c_{\bar{j}}))$, donde $c_{\bar{i}} = c_{i_0}, \ldots, c_{i_{n-1}}$ si $\bar{i} = (i_0, \ldots, i_{n-1})$. Basta establecer que el conjunto

$$T \cup \bigcup_{n \in \omega} \{\varphi_{\bar{i},\bar{j}} : \bar{i}, \bar{j} \in [I]^n, \varphi \in L_n\} \cup \{\neg c_i = c_j : i, j \in I, i \neq j\}$$

tiene un modelo y ello puede hacerse por compacidad. Podemos suponer entonces que $(I,<) = (\omega,<)$. Basta establecer que para cada $n, m \in \omega$ y cualesquiera $\varphi^1, \ldots, \varphi^m \in L_n$ el conjunto

$$\Sigma \;=\; T \cup \{(\varphi^1_{\bar{i},\bar{j}} \wedge \cdots \wedge \varphi^m_{\bar{i},\bar{j}}) : \bar{i}, \bar{j} \in [\omega]^n\} \cup \{\neg c_i = c_j : i, j \in I, i \neq j\}$$

tiene un modelo. Sea M un modelo infinito de T, $A \subseteq M$ un subconjunto arbitrario de cardinalidad ω y enumeremos $A = \{a_i : i \in \omega\}$. Decimos que $a, b \in [A]^n$ (con el orden inducido) son equivalentes si $M \models (\varphi^k(a) \leftrightarrow \varphi^k(b))$ para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$. Esta relación induce una partición de $[A]^n$ en $\leq 2^m$ clases. Por el teorema de Ramsey hay un subconjunto infinito J de ω tal que para cualesquiera $\bar{i}, \bar{j} \in [J]^n$, las tuplas $a_{\bar{i}}$ y $a_{\bar{j}}$ son equivalentes. Sin perder generalidad, $J = \omega$. Si interpretamos en M la constante c_i como el elemento a_i obtenemos un modelo de Σ.

Definición Sea $(I,<)$ un orden total y $(a_i : i \in I)$ una secuencia de indiscernibles en un modelo M. Su *conjunto de Ehrenfeucht-Mostowski* es el conjunto de fórmulas $\varphi \in L_n$ tales que para cada tupla creciente $\bar{i} \in [I]^n$, $M \models \varphi(a_{\bar{i}})$.

Proposición 12.4 *Sea T una teoría con funciones de Skolem, sean $(I,<)$ y $(I',<')$ órdenes totales y sean $(a_i : i \in I)$ y $(b_i : i \in I')$ secuencias de indiscernibles en modelos de T. Sean M y M' los submodelos (elementales) generados respectivamente por $(a_i : i \in I)$ y $(b_i : i \in I')$ y supóngase que las secuencias tienen idéntico conjunto de Ehrenfeucht-Mostowski. Entonces para cada inmersión $f : (I,<) \to (I',<')$, la aplicación $a_i \mapsto b_{f(i)}$ tiene una y sólo una extensión a una aplicación (elemental) $\tilde{f}$ de M en M'. Si f es exhaustiva también lo es $\tilde{f}$. Por tanto, si $(I,<) \cong (I',<')$, entonces $M \cong M'$.*

Prueba. Sea Φ el conjunto de Ehrenfeucht-Mostowski de estas secuencias y pongamos $c_i = b_{f(i)}$. Entonces para cada $\varphi \in L_n$ y cada n-tupla creciente $\bar{i} \in [I]^n$,

$$M \models \varphi(a_{\bar{i}}) \;\Leftrightarrow\; \varphi \in \Phi \;\Leftrightarrow\; M' \models \varphi(c_{\bar{i}}).$$

Esto implica que podemos extender a M la aplicación $a_i \mapsto c_i$ con la cláusula

$$\tilde{f}(t^M(a_{\bar{i}})) = t^{M'}(c_{\bar{i}}).$$

Ésta es la única manera de extender la aplicación a una inmersión de M en M'.

Corolario 12.5 *Sea T una teoría con funciones de Skolem, $(I,<)$ un orden total y M un modelo generado por una secuencia no trivial de indiscernibles $(a_i : i \in I)$. Existe entonces una inmersión $\mathrm{Aut}(I,<) \to \mathrm{Aut}(M)$.*

Prueba. Por la proposición 12.4 todo automorfismo de $(I,<)$ se extiende de un único modo a un automorfismo de M.

Proposición 12.6 *Sea T una teoría con modelos infinitos y de tipo de semejanza L y sea $(I,<)$ un orden total. Existe un modelo M de T de cardinalidad $\leq |I| + |L| + \omega$ para el que existe una inmersión $\mathrm{Aut}(I,<) \to \mathrm{Aut}(M)$.*

Prueba. Sea T^{SK} una extensión de T con funciones de Skolem como en la proposición 12.1 y sea M un modelo de T^{SK} generado por una secuencia no trivial de indiscernibles $(a_i : i \in I)$ de acuerdo con la proposición 12.3. Entonces si N es la restricción de M a L, tenemos que $\mathrm{Aut}(M)$ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(N)$ y por el corolario 12.5, existe una inmersión de $\mathrm{Aut}(I,<)$ en $\mathrm{Aut}(M)$.

Definición (Modelos de Ehrenfeucht-Mostowski) Supongamos que T tiene funciones de Skolem, que $(I,<)$ es un orden total y que M es un modelo generado por una secuencia de indiscernibles $(a_i : i \in I)$. Sea Φ el conjunto de Ehrenfeucht-Mostowski de M. Salvo isomorfía M es el único modelo generado por una secuencia de indiscernibles con orden $(I,<)$ que tiene conjunto de Ehrenfeucht-Mostowski Φ. Lo llamamos *modelo de Ehrenfeucht-Mostowki de $(I,<)$ y Φ.*

Proposición 12.7 *Sea T una teoría con funciones de Skolem y sea $M \models T$ un modelo de Ehrenfeucht-Mostowski de orden infinito $(I,<)$. Para cada orden infinito $(I',<')$ existe entonces un modelo de Ehrenfeucht-Mostowski de T con orden $(I',<')$ y con el mismo conjunto de Ehrenfeucht-Mostowski Φ que M.*

Prueba. Por compacidad, dado que el conjunto de sentencias preciso para obtener un modelo de Ehrenfeucht-Mostowski de $(I', <')$ y Φ es finitamente satisfacible en un modelo de Ehrenfeucht-Mostowski de $(I, <)$ y Φ.

Proposición 12.8 *Sea T una teoría con funciones de Skolem y sean $M, M' \models T$ modelos de Ehrenfeucht-Mostowski de órdenes infinitos $(I, <)$ y $(I', <')$ respectivamente. Si M y M' tienen el mismo conjunto Φ de Ehrenfeucht-Mostowski, entonces para cada $n \in \omega$, M y M' realizan los mismos n-tipos sobre $\emptyset$.*

Prueba. Sean $(a_i : i \in I)$ y $(b_i : i \in I')$ secuencias de indiscernibles que generan respectivamente los modelos M y M'. Toda n-tupla de $\overline{c} \in M$ tiene una representación en la forma $\overline{c} = (t_1^M(a_{\overline{i}}), \ldots, t_n^M(a_{\overline{i}}))$, donde $t_1, \ldots, t_n$ son términos del lenguaje L de T y $\overline{i}$ es una m-tupla creciente de elementos de I para un cierto $m \in \omega$. Escojamos una m-tupla creciente $\overline{j}$ en I'. Entonces si $\overline{d} = (t_1^N(b_{\overline{j}}), \ldots, t_n^N(b_{\overline{j}}))$, resulta que para cada $\varphi \in L_n$,

$$M \models \varphi(\overline{b}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(t_1, \ldots, t_n) \in \Phi \;\Leftrightarrow\; N \models \varphi(\overline{d})$$

y por tanto $\mathrm{tp}(\overline{c}/\emptyset) = \mathrm{tp}(\overline{d}/\emptyset)$.

Proposición 12.9 *Sea T una teoría de tipo de semejanza L que tiene modelos infinitos. Para cada cardinal $\kappa \geq |L| + \omega$, T tiene un modelo M de cardinal κ tal que para cada $A \subseteq M$, M realiza $\leq |A| + |L| + \omega$ tipos sobre A.*

Prueba. Podemos suponer que T tiene funciones de Skolem. Sea $(a_i : i < \kappa)$ una secuencia no trivial de indiscernibles (con tipo de orden κ) y sea M un modelo de Ehrenfeucht-Mostowski generado por esta secuencia. Basta establecer el resultado para $A \subseteq \{a_i : i < \kappa\}$. Consideremos un tal A, y sea $I \subseteq \kappa$ tal que $A = \{a_i : i \in I\}$. Como κ está bien ordenado, hay $\leq 2|I| + 1$ tipos atómicos de elementos de κ sobre I. Una inducción muestra que hay $\leq \prod_{i=1}^{n} 2|I| + (2i - 1)$ tipos atómicos de n-tuplas de κ sobre I. Ello implica que hay $\leq |I| + |L| + \omega$ tipos de elementos de M sobre A: para cada tipo realizado p escogemos una realización $t^M(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ y le asignamos el par formado por el término $t(x_1, \ldots, x_n)$ de L y el tipo atómico de la n-tupla $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ sobre I.

Capítulo 13

Teoremas de dos cardinales

En este capítulo T es una teoría completa con modelos infinitos. Su lenguaje es L. Fijamos un modelo saturado $\mathfrak{C}$ cuyo cardinal es mayor que el de cualquier otro modelo en consideración. Esto puede hacerse construyendo $\mathfrak{C}$ como un modelo cuyo universo sea una clase propia. Si no se dice lo contrario explícitamente se entiende que un modelo es siempre un submodelo elemental de $\mathfrak{C}$. Llamamos a $\mathfrak{C}$ *modelo monstruo* de T. Los conjuntos de parámetros que consideremos serán siempre subconjuntos de $\mathfrak{C}$. La notación $\models \varphi(a)$ abrevia $\mathfrak{C} \models \varphi(a)$.

Definición (Par de Vaught) Sea $\varphi = \varphi(x, a)$ y $a \in \mathfrak{C}$ una tupla. Un *par de Vaught* para φ está formado por dos modelos M, N tales que $a \in M$, $M \prec N$, $M \neq N$, $\varphi(M) = \varphi(N)$ y $|\varphi(M)| \geq \omega$.

Lema 13.1 *Si $\varphi = \varphi(x, a)$ y existe un N tal que $a \in N$ y $\omega \leq |\varphi(N)| < |N|$ y $|N| > |T|$, entonces hay un par de Vaught para φ.*

Prueba. Sea $\kappa = |T| + |\varphi(N)|$. Existe un modelo $M \prec N$ de cardinalidad κ con $\varphi(N) \subseteq M$. Ese modelo verifica entonces $\varphi(M) = \varphi(N)$ y $|M| < |N|$, de manera que (M, N) es un par de Vaught para φ.

Teorema 13.2 (Teorema de 2 Cardinales de Vaught) *Si T es numerable y existe un par de Vaught para $\varphi = \varphi(x, a)$, entonces existe un modelo N de T de cardinal ω_1 en el que $|\varphi(N)| = \omega$.*

Prueba. Comenzamos con un par de Vaught (M_0, N_0). Podemos suponer que estos modelos son numerables. Vemos en un primer paso que podemos encontrar otro par de Vaught (M_1, N_1) donde ahora M_1, N_1 además de ser numerables, realizan los mismos n-tipos sobre $\emptyset$. Como $M_0 \prec N_0$, es claro que todo n-tipo realizado en M_0 también es realizado en N_0. Ampliamos el lenguaje introduciendo constantes para los parámetros a de φ, un predicado U para referirnos a M_0 y para cada $n \in \omega$, nuevos símbolos funcionales n-ádicos F_n^i con $1 \leq i \leq n$. Consideremos la teoría del modelo (N_0, M_0, a) en este lenguaje ampliado junto con los enunciados que expresan que para cada n-tupla x, la correspondiente n-tupla

$(F_n^1(x), \ldots, F_n^n(x))$ está formada por elementos de U y satisface en el submodelo U las mismas fórmulas de L sin parámetros que x en el modelo grande. Por compacidad se ve fácilmente que este conjunto de sentencias tiene un modelo. Pero un modelo numerable de este conjunto de sentencias nos da el par de Vaught que buscamos.

En un segundo paso veremos ahora que se puede obtener un par de Vaught (M_2, N_2) que está formado por modelos que además de tener las propiedades ya indicadas son homogéneos. Para ello volvemos a ampliar el lenguaje como antes y ponemos

$$N_1^* = (N_1, M_1, \overline{a}, G_n^i)_{1 \leq i \leq n < \omega},$$

donde $U^{N_1^*} = M_1$ y $(F_i^n)^{N_1^*} = G_i^n$. Una pequeña modificación de la prueba de existencia de extensiones numerables homogéneas de modelos numerables (ver 8.19) sirve para mostrar que existe una extensión numerable N^* de N_1^* con $N_2 = N_2^* \restriction L$ homogéneo y $M_2 = (N_2^* \restriction L)|U^{N_2^*}$ homogéneo. Ahora (M_2, N_2) es un par de Vaught formado por modelos numerables homogéneos que para cada $n \in \omega$ satisfacen los mismos n-tipos sobre $\emptyset$. Por la proposición 8.22 M_2 y N_2 son isomorfos.

En definitiva, tenemos un par de Vaught (M, N) formado por modelos numerables homogéneos isomorfos. Este es el punto de partida para construir una cadena elemental $(M_i : i < \omega_1)$ de modelos numerables isomorfos al modelo inicial $M = M_0$ y con $\varphi(M_i) = \varphi(M)$. El isomorfismo entre M_i y M indica cómo obtener M_{i+1} a imagen de N. En el caso $i < \omega_1$ límite se define M_i como la unión $\bigcup_{j<i} M_j$. Como $(M_j : j < i)$ es una cadena elemental de modelos numerables homogéneos, también M_i es homogéneo. Para ver que $M_i \cong M$ basta entonces con mostrar que M_i y M realizan los mismos tipos sobre $\emptyset$. Pero eso es claro, pues todo tipo realizado en M_i es realizado en algún M_j con $j < i$, y $M_j \cong M$. Construida ya la cadena elemental, sólo falta constatar que si $M_{\omega_1} = \bigcup_{i<\omega_1} M_i$, resulta que $M \prec M_{\omega_1}$, $\varphi(M) = \varphi(M_{\omega_1})$ y M_{ω_1} es de cardinalidad ω_1.

Corolario 13.3 *Si T es numerable, $\varphi = \varphi(x, a)$ y existe un modelo M con $a \in M$ y $|M| > |\varphi(M)| \geq \omega$, entonces existe también un modelo N con $a \in N$, $|N| = \omega_1$ y $|\varphi(N)| = \omega$.*

Prueba. Por el lema 13.1 y el teorema 13.2.

Proposición 13.4 *Las teorías numerables ω_1-categóricas no tienen pares de Vaught.*

Prueba. Supongamos que T tiene un par de Vaught para la fórmula $\varphi = \varphi(x, a)$. Entonces, por el corolario 13.3, T tiene un modelo M con $a \in M$, $|M| = \omega_1$ y $|\varphi(M)| = \omega$. Pero por otro lado es fácil obtener un modelo N de T de cardinal ω_1 donde para cada tupla $b \in N$ si $\varphi(N, b)$ es infinito entonces tiene cardinalidad ω_1. Obviamente M y N no son isomorfos.

Definición (Propiedad de Keisler) Supongamos que L tiene un predicado diádico $<$ que en todo modelo de T se interpreta como un orden total del universo sin mayor elemento. Decimos que $M \models T$ tiene la *propiedad de Keisler respecto a $\varphi(x) \in L(M)$ y $<$* si para cada fórmula $\psi(x, y) \in L(M)$,

$$M \models \forall u \exists x(u < x \wedge \exists y(\varphi(y) \wedge \psi(x, y)) \rightarrow \exists y(\varphi(y) \wedge \forall u \exists x(u < x \wedge \psi(x, y))).$$

Lema 13.5 *Sea $\varphi = \varphi(x, a)$ con $a \in M$ y $|\varphi(M)| \geq \omega$. Si M y T son numerables y M tiene la propiedad de Keisler respecto a $\varphi(x)$ y $<$, entonces hay $N \models T$ numerable tal que (M, N) es un par de Vaught para φ.*

Prueba. Sea c una constante nueva. Usando el teorema de omisión de tipos basta ver que el tipo

$$p(x) = \{\varphi(x)\} \cup \{\neg x = m : m \in M\}$$

es no aislado en la teoría T^* obtenida al agregar al diagrama elemental de M los enunciados $c > m$ para cada $m \in M$. Observemos que, por el teorema de compacidad, para cada fórmula $\theta(x) \in L(M)$,

$$T^* \models \theta(c) \quad \Leftrightarrow \quad M \models \exists y \forall x > y \theta(x). \tag{13.1}$$

Ahora sea $\psi(x, y) \in L(M)$ tal que $(\psi(x, c) \wedge \varphi(x))$ es consistente con T^* y veamos que hay $m \in M$ para el que $\psi(m, c)$ es consistente con T^*. Con ello quedará establecido que $p(x)$ es no aislado en T^* y por tanto el lema. Tenemos que $T^* \not\models \neg \exists x(\psi(x, c) \wedge \varphi(x))$, de modo que, por 13.1,

$$M \models \forall y \exists x > y \exists u(\varphi(u) \wedge \psi(u, x)).$$

Como M tiene la propiedad de Keisler,

$$M \models \exists u(\varphi(u) \wedge \forall y \exists x > y \psi(u, x)),$$

con lo cual existe $m \in M$ tal que

$$M \models (\varphi(m) \wedge \forall y \exists x > y \psi(m, x)).$$

Usando de nuevo por 13.1 se concluye que $(\varphi(m) \wedge \psi(m, c))$ es consistente con T^*.

Proposición 13.6 *Sea $\varphi(x) \in L(M)$ y $|\varphi(M)| \geq \omega$. Si M y T son numerables y M tiene la propiedad de Keisler respecto a $\varphi(x)$ y $<$, entonces hay $N \models T$ tal que (M, N) es un par de Vaught para φ y $|N| = \omega_1$.*

Prueba. El modelo N se obtiene como la unión de una cadena elemental $(M_i : i < \omega_1)$ de modelos numerables. Comenzamos con $M_0 = M$, en los límites tomamos uniones y para definir M_{i+1} aplicamos a M_i el lema 13.5.

Teorema 13.7 (Teorema de 2 Cardinales de Keisler) *Sea T numerable y sea $\varphi = \varphi(x) \in L(M)$ y $|M| > |\varphi(M)| \geq \omega$. Entonces hay N, N' tales que $N \prec M$, $N \prec N'$, $|N| = \omega$, $|N'| = \omega_1$ y (N, N') es un par de Vaught respecto a φ.*

Prueba. Sea $\kappa = |\varphi(M)|$. Podemos suponer que $|M| = \kappa^+$. Introducimos un nuevo signo $<$ y lo interpretamos como un orden $<^M$ de tipo κ^+ del universo de M. Al ser κ^+ un cardinal regular, resulta que $(M, <^M)$ tiene la propiedad de Keisler respecto a φ y $<$. Sea $(N, <^N) \prec (M, <^M)$ una subestructura elemental numerable con $\varphi \in L(N)$. También $(N, <^N)$ tiene la propiedad de Keisler. El resto se sigue de la proposición 13.6.

Proposición 13.8 *Sea T numerable. Si T posee un modelo no saturado de cardinal $\kappa > \omega$, entonces T tiene también un modelo no saturado de cardinal ω_1.*

Prueba. Sea $M \models T$ no saturado con $|M| = \kappa > \omega$. Hay entonces $A \subseteq M$ de cardinalidad $< \kappa$ y $p(x) \in S(A)$ que no se realiza en M. Como T es numerable, $|p(x)| < \kappa$. Sea $U \subseteq M$ de la misma cardinalidad que $p(x)$. Podemos poner entonces $p(x) = \{\varphi_a : a \in U\}$. Consideramos además dos relaciones entre elementos de M:

1. $R(a, b)$ si y sólo si $a \in U$ y b aparece en φ_a,
2. $S(a, b)$ si y sólo si $a \in U$ y b satisface φ_a.

En la expansión (M, U, R, S) se satisface $\forall y(S(a, y) \leftrightarrow \varphi_a(y))$ para cada $a \in U$ y se satisface también el enunciado $\neg\exists t\forall x(U(x) \rightarrow S(u, x))$. Por el teorema 13.7, existe $(M_0, U_0, R_0, S_0) \prec (M, U, R, S)$ y $(M_1, U_1, R_1, S_1) \succ (M_0, U_0, R_0, S_0)$ tales que $|M_0| = \omega$, $|M_1| = \omega_1$ y $U_0 = U_1$. Si $a \in U_0$, las constantes de φ_a están todas en M_0, pues forman un conjunto finito. Así pues $\varphi_a \in L(M_0)$ para cada $a \in U_0$. Entonces el conjunto de fórmulas $\{\varphi_a : a \in U_0\}$ es finitamente satisfacible en M_1 pero no puede ser realizado en M_1. Eso implica que M_1 no es saturado.

Capítulo 14

Rango de Morley

En este capítulo y en los sucesivos T es una teoría completa con modelos infinitos, L es su lenguaje y $\mathfrak{C}$ es su modelo monstruo.

Definición (Rango y grado de Morley) El *rango de Morley de un tipo global* $\mathfrak{p}$ es su rango de Cantor-Bendixson en el espacio $S(\mathfrak{C})$, esto es, $\mathrm{RM}(\mathfrak{p}) = \mathrm{CBR}_{S(\mathfrak{C})}(\mathfrak{p})$. El *rango de Morley de un tipo* p es el rango de Cantor-Bendixson del cerrado $\{\mathfrak{p} : p \subseteq \mathfrak{p}\}$ en el espacio $S(\mathfrak{C})$. Se denota con $\mathrm{RM}(p)$. El *grado de Morley de* p, $\mathrm{DM}(p)$, es el grado de Cantor-Bendixson de $\{\mathfrak{p} : p \subseteq \mathfrak{p}\}$. De acuerdo con esto, $\mathrm{RM}(p)$ es el máximo de los valores $\mathrm{RM}(\mathfrak{p})$ para $\mathfrak{p} \supseteq p$ y si $\mathrm{RM}(p) < \infty$, entonces $\mathrm{DM}(p)$ es el número (finito) de tipos $\mathfrak{p} \supseteq p$ con $\mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(\mathfrak{p})$. Finalmente el *rango y grado de Morley de una fórmula* φ es el rango y grado de Morley del tipo $\{\varphi\}$. Así $\mathrm{RM}(\varphi) = \mathrm{CBR}_{S(\mathfrak{C})}([\varphi])$ y $\mathrm{DM}(\varphi) = \mathrm{CBD}_{S(\mathfrak{C})}([\varphi])$ recordando que $[\varphi] = \{\mathfrak{p} : \varphi \in \mathfrak{p}\}$.

Si bien el rango de Morley está definido para tipos parciales cualesquiera, es especialmente importante el rango de Morley de los tipos completos $p \in S(A)$ pues otras nociones de rango más generales sólo están definidas en esa situación. Los resultados expuestos en la siguiente proposición podrían haberse enunciado para tipos parciales. Lo hacemos sólo para tipos completos porque anticipan los rasgos característicos de las mencionadas generalizaciones.

Proposición 14.1 *Sea* $p \in S(A)$.

(1) Si $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$, *entonces* $\mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(p^f)$.

(2) Si $A \subseteq B$ *y* $p \subseteq q \in S(B)$, *entonces* $\mathrm{RM}(p) \geq \mathrm{RM}(q)$.

(3) Si $A \subseteq B$, *entonces hay* $q \in S(B)$ *tal que* $p \subseteq q$ *y* $\mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(q)$.

(4) Si $\mathrm{RM}(p) < \infty$ *y* $A \subseteq B$, *entonces el conjunto* $\{q \in S(B) : p \subseteq q \text{ y } \mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(q)\}$ *es finito.*

A diferencia de otras nociones de rango, el rango de Morley está también definido para fórmulas. La siguiente proposición caracteriza el rango de Morley de una fórmula de modo independiente.

Proposición 14.2 *Sea* $\varphi = \varphi(x) \in L(\mathfrak{C})$ *una fórmula.*

(1) $\mathrm{RM}(\varphi) \geq 0$ *si y sólo si* φ *es consistente.*

(2) $\mathrm{RM}(\varphi) \geq \alpha + 1$ *si y sólo si existe una familia de fórmulas* $(\varphi_i(x) : i < \omega)$ *tales que* $\mathrm{RM}(\varphi_i) \geq \alpha$, $\models \varphi_i \to \varphi$ *y* $\models \neg(\varphi_i \wedge \varphi_j)$ *para* $i \neq j$.

(3) Si α *es límite,* $\mathrm{RM}(\varphi) \geq \alpha$ *si y sólo si* $\mathrm{RM}(\varphi) \geq i$ *para cada* $i < \alpha$.

(4) Si $\mathrm{RM}(\varphi) = \alpha$, *entonces el grado de Morley de* φ *es el mayor número* $n < \omega$ *para el que existen fórmulas* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *tales que* $\models \varphi_i \to \varphi$, $\mathrm{RM}(\varphi_i) = \alpha$ *y* $\models \neg(\varphi_i \wedge \varphi_j)$ *para* $i \neq j$.

Prueba. Se sigue inmediatamente de las correspondientes propiedades del rango y grado de Cantor-Bendixson para abierto-cerrados en espacios booleanos.

Observaciones 14.3 *Sea* $\varphi = \varphi(x) \in L(\mathfrak{C})$.

(1) Si $\varphi(x) \in L(A)$, *entonces existe* $p \in S(A)$ *tal que* $\varphi \in p$ *y* $\mathrm{RM}(\varphi) = \mathrm{RM}(p)$.

(2) Si $\mathrm{RM}(\varphi) \geq \alpha + 1$, *entonces existe una fórmula* $\psi = \psi(x)$ *tal que* $\mathrm{RM}(\varphi \wedge \psi) \geq \alpha$ *y* $\mathrm{RM}(\varphi \wedge \neg\psi) \geq \alpha$.

(3) Si $\varphi = (\varphi_0 \vee \varphi_1)$, *entonces* $\mathrm{RM}(\varphi) = \max\{\mathrm{RM}(\varphi_0), \mathrm{RM}(\varphi_1)\}$. *Y si además* $\mathrm{RM}(\varphi) = \mathrm{RM}(\varphi_0) = \mathrm{RM}(\varphi_1) < \infty$ *y* $\models \neg(\varphi_0 \wedge \varphi_1)$, *entonces* $\mathrm{DM}(\varphi) = \mathrm{DM}(\varphi_0) + \mathrm{DM}(\varphi_1)$.

(4) Si existe una biyección definible entre $\varphi(\mathfrak{C})$ *y* $\psi(\mathfrak{C})$, *entonces* $\mathrm{RM}(\varphi) = \mathrm{RM}(\psi)$.

Proposición 14.4 *Sea* $p = p(x)$ *un tipo cerrado bajo conjunción. Hay entonces una fórmula* $\varphi_p \in p$ *tal que* $\mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(\varphi_p)$ *y* $\mathrm{DM}(p) = \mathrm{DM}(\varphi_p)$. *Por tanto,* $\mathrm{RM}(p) = \min\{\mathrm{RM}(\varphi : \varphi \in p\}$ *y* $\mathrm{DM}(p) = \min\{\mathrm{DM}(\varphi) : \varphi \in p$ *y* $\mathrm{RM}(\varphi) = \mathrm{RM}(p)\}$.

Prueba. Sea $F = \{\mathfrak{p} : p \subseteq \mathfrak{p}\}$. Por motivos meramente topológicos sabemos que hay una fórmula $\psi(x) \in L(\mathfrak{C})$ con $F \subseteq [\psi]$, $\mathrm{RM}(\psi) = \mathrm{RM}(p)$ y $\mathrm{DM}(\psi) = \mathrm{DM}(p)$. Por compacidad hay una fórmula $\varphi_p(x) \in p$ que verifica $\models \varphi_p \to \psi$. Entonces $F \subseteq [\varphi_p] \subseteq [\psi]$, de modo que φ_p cumple las condiciones exigidas.

Proposición 14.5 *Sea* M *un modelo* ω*-saturado y* p *un tipo sobre* M. *Entonces* $\mathrm{RM}(p) = \mathrm{CBR}_{S(M)}(\{q \in S(M) : p \subseteq q\})$ *y* $\mathrm{DM}(p) = \mathrm{CBD}_{S(M)}(\{q \in S(M) : p \subseteq q\})$.

Prueba. Por la proposición 14.4 basta establecerlo para $p = \{\varphi\}$ y ello se sigue de la proposición 14.2.

Proposición 14.6 *Sea* $\varphi = \varphi(x)$. *Entonces* $\mathrm{RM}(\varphi) < \infty$ *si y sólo si no hay ningún árbol binario* $(\varphi_s : s \in^{<\omega} 2)$ *de fórmulas consistentes* $\varphi_s = \varphi_s(x)$ *tales que*

1. $\models \varphi_s \to \varphi$

2. $\models \neg(\varphi_{s^\frown 0} \wedge \varphi_{s^\frown 1})$

3. $\models \varphi_s \leftrightarrow (\varphi_{s^\frown 0} \vee \varphi_{s^\frown 1})$.

Prueba. Por argumentos topológicos sabemos que si U es un abierto-cerrado en un espacio booleano X, entonces la condición $\mathrm{CBR}(U) < \infty$ equivale a la inexistencia de un árbol binario $(U_s : s \in^{<\omega} 2)$ de abierto-cerrados no vacíos U_s tales que $U_s \subseteq U$ y $U_s = U_{s^\frown 0} \dot{\cup} U_{s^\frown 1}$. Pero para demostrar que existe este árbol cuando $\mathrm{CBR}(U) = \infty$ necesitamos usar el hecho de que el espacio X es un conjunto y no una clase propia, de modo que este resultado no puede aplicarse en principio a $S(\mathfrak{C})$. Pero sí puede aplicarse a $S(M)$ siendo M un modelo ω-saturado y por la proposición 14.5 ello es suficiente.

Proposición 14.7 *Si* $\mathrm{RM}(p) \geq |T|^+$, *entonces* $\mathrm{RM}(p) = \infty$.

Prueba. De nuevo basta con considerar el caso $p = \{\varphi\}$. Sea $\varphi = \varphi(x, a)$ con $\varphi(x, y) \in L$ y $\mathrm{RM}(\varphi) \geq |T|^+$. Vamos a ver que hay entonces un árbol binario $(\varphi_s : s \in^{<\omega} 2)$ de fórmulas $\varphi_s = \varphi_s(x, y_s)$ tales que

1. $\varphi_\emptyset = \varphi(x, y)$,
2. $\models \varphi_s \leftrightarrow (\varphi_{s^\frown 0} \vee \varphi_{s^\frown 1})$,
3. $\models \neg(\varphi_{s^\frown 0} \wedge \varphi_{s^\frown 1})$,
4. existe un árbol binario $(a_s : s \in^{<\omega} 2)$ de parámetros a_s tales que $a_\emptyset = a$ y $\varphi_s(x, a_s)$ es consistente para cada $s \in^{<\omega} 2$.

Por la proposición 14.6 esto mostrará que $\mathrm{RM}(\varphi) = \infty$. Obtenemos el árbol inductivamente garantizando en la construcción que para cada $s \in^{<\omega} 2$ y cada $\alpha < |T|^+$ hay un a_α tal que $\mathrm{RM}(\varphi_s(x, a_\alpha)) \geq \alpha$. Esta condición la cumple $\varphi_\emptyset = \varphi(x, y)$ con $a = a_\alpha$. Veamos cómo se obtienen $\varphi_{s^\frown 0}$ y $\varphi_{s^\frown 1}$ a partir de φ_s. Sea $\alpha < |T|^+$. Por hipótesis inductiva tenemos un $a_{\alpha+1}$ con $\mathrm{RM}(\varphi_s(x, a_{\alpha+1})) \geq \alpha + 1$. Hay por tanto $\psi_\alpha = \psi_\alpha(x, y_\alpha) \in L$ y b_α con

$$\mathrm{RM}(\varphi_s(x, a_{\alpha+1}) \wedge \psi_\alpha(x, b_\alpha)) \geq \alpha \ \text{ y } \ \mathrm{RM}(\varphi_s(x, a_{\alpha+1}) \wedge \neg\psi_\alpha(x, b_\alpha)) \geq \alpha.$$

Por motivos de cardinalidad debe haber $\alpha < |T|^+$ que para un conjunto cofinal $A \subseteq |T|^+$ verifica:

$$\forall i \in A \ \ \psi_i(x, y_i) = \psi_\alpha(x, y_\alpha).$$

Ponemos entonces $\varphi_{s^\frown 0} = (\varphi_s \wedge \psi_\alpha)$ y $\varphi_{s^\frown 1} = (\varphi_s \wedge \neg\psi_\alpha)$.

Definición (Teoría totalmente trascendente) T es *totalmente trascendente* si para cada tipo p, $\mathrm{RM}(p) < \infty$. De hecho basta con pedir que para cada fórmula φ, $\mathrm{RM}(\varphi) < \infty$ e incluso que $\mathrm{RM}(x = x) < \infty$ para cada tupla de variables x. Por la proposición previa es suficiente ver que $\mathrm{RM}(x = x) < |T|^+$.

Proposición 14.8 *T es totalmente trascendente si y sólo si no hay ningún árbol binario $(\varphi_s : s \in^{<\omega} 2)$ de fórmulas consistentes $\varphi_s = \varphi_s(x)$ tales que*

(1) $\models \neg(\varphi_{s^\frown 0} \wedge \varphi_{s^\frown 1})$

(2) $\models \varphi_s \leftrightarrow (\varphi_{s^\frown 0} \vee \varphi_{s^\frown 1})$.

Prueba. Por la proposición 14.6.

Definición (λ-estabilidad) La teoría T es *λ-estable* o *estable en* λ si para cada A con $|A| \leq \lambda$ y cada $n < \omega$, se tiene $|S_n(A)| \leq \lambda$.

Lema 14.9 *Una teoría es λ-estable si para cada A con $|A| \leq \lambda$, se tiene $|S_1(A)| \leq \lambda$.*

Prueba. Vemos por inducción en $n < \omega$ que si $|A| \leq \lambda$, entonces $|S_n(A)| \leq \lambda$. Por hipótesis inductiva existen una familia $(a_i : i < \lambda)$ de n-tuplas a_i tales que $S_n(A) = \{\mathrm{tp}(a_i/A) : i < \lambda\}$. Sea $i < \lambda$. Como en $A \cup \{a_i\}$ hay $\leq \lambda$ elementos, por λ-estabilidad existe una familia $(b^i_j : j < \lambda)$ de elementos b^i_j tales que $S_1(Aa_i) = \{\mathrm{tp}(b^i_j/Aa_i) : j < \lambda\}$. En ese caso $S_{n+1}(A) = \{\mathrm{tp}(a_i b^i_j/A) : i, j < \lambda\}$, de modo que también $|S_{n+1}(A)| \leq \lambda$.

Proposición 14.10 *Si T es ω-estable, entonces T es totalmente trascendente. Y si T es totalmente trascendente, entonces T es λ-estable para cada $\lambda \geq |T|$.*

Prueba. El primer punto se sigue de la proposición 14.8, pues en el árbol hay $\leq \omega$ parámetros y 2^ω ramas distintas que dan lugar a tipos incompatibles. Respecto a la segunda cuestión, sea $\lambda \geq |T|$, sea $|A| \leq \lambda$ y sea $p \in S_n(A)$. De acuerdo con la proposición 14.4 podemos asociar a p una fórmula $\varphi_p \in p$ con $\mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(\varphi_p)$ y $\mathrm{DM}(p) = \mathrm{DM}(\varphi_p)$. Esta asignación es inyectiva si T es totalmente trascendente, pues si $\mathrm{RM}(p) < \infty$ y $\psi \in L(A)$,

$$\psi \in p \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{RM}(\varphi_p \wedge \psi) = \mathrm{RM}(\varphi_p) \text{ y } \mathrm{DM}(\varphi_p \wedge \psi) = \mathrm{DM}(\varphi_p).$$

Corolario 14.11 *Si T es numerable, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) T es totalmente trascendente,

(2) T es ω-estable,

(3) T es λ-estable para cada λ.

Prueba. Por la proposición 14.10.

Proposición 14.12 *T es totalmente trascendente si y sólo si* $\mathrm{RM}(x = x) < \infty$ *siendo x una sola variable.*

Prueba. T es totalmente trascendente si y sólo si $T \upharpoonright L_0$ es totalmente trascendente para cada $L_0 \subseteq L$ numerable. Por el corolario 14.11 esa última condición en $T_0 = T \upharpoonright L_0$ equivale a que T_0 sea ω-estable y por el lema 14.9 a que en T_0, $|S_1(A)| \leq \omega$ para A numerable. Obsérvese además que la prueba de la proposición 14.10 muestra de hecho que, fijado $n < \omega$, en T_0 (numerable) se tiene $|S_n(A)| \leq \omega$ para cada A numerable si y sólo si $\mathrm{RM}(\varphi) < \infty$ para cada fórmula φ con a lo sumo n variables libres.

Capítulo 15

Modelos primos

En este capítulo usaremos a menudo secuencias $(a_i : i < \alpha)$ con índices ordinales. En este contexto usaremos la notación $a_{<i} = \{a_j : j < i\}$. En el capítulo 5 se introdujeron las nociones de modelo primo y de conjunto atómico y se establecieron algunos resultados básicos. Ahora continuamos ese estudio.

Usaremos la notación $a \equiv_C b$ para indicar que $\mathrm{tp}(a/C) = \mathrm{tp}(b/C)$. Obsérvese que $a \equiv_{Cd} b$ es equivalente a $ad \equiv_C bd$. Además si sabemos que $a \equiv_C b$ existe un automorfismo de $\mathfrak{C}$ que es la identidad en C y transforma a en b. De ello se sigue que para cualquier d podemos encontrar un e tal que $ad \equiv_C be$.

Definición (Construcción y conjunto construible) Decimos que la secuencia $(b_i : i < \alpha)$ es una *construcción sobre* A si para cada $i < \alpha$, b_i es atómico sobre $Ab_{<i}$. Un conjunto B es *construible sobre* A si existe una construcción $(b_i : i < \alpha)$ sobre A tal que $B = \{b_i : i < \alpha\}$. Un modelo M construible sobre $A \subseteq M$ se llama también modelo *estrictamente primo sobre* A o *modelo primario sobre* A.

Lema 15.1 *Sean a, b secuencias finitas. Entonces* $\mathrm{tp}(ab/C)$ *es aislado si y sólo si* $\mathrm{tp}(a/C)$ *y* $\mathrm{tp}(b/Ca)$ *son aislados.*

Prueba. Supongamos que $\varphi(x, y) \in L(C)$ aísla $\mathrm{tp}(ab/C)$. Entonces $\exists y \varphi(x, y)$ aísla $\mathrm{tp}(a/C)$ y $\varphi(a, y)$ aísla $\mathrm{tp}(b/Ca)$. Por otro lado, si $\varphi(x) \in L(C)$ aísla $\mathrm{tp}(a/C)$ y $\psi(x, y) \in L(C)$ y $\psi(a, y)$ aísla $\mathrm{tp}(b/Ca)$, entonces $\varphi(x) \wedge \psi(x, y)$ aísla $\mathrm{tp}(ab/C)$.

Lema 15.2 *Si A es atómico sobre BC y B es atómico sobre C, entonces AB es atómico sobre C*

Prueba. Sea $a \in A$ y $b \in B$ tuplas. Como a es atómico sobre CB, hay $b' \in B$ tal que a es atómico sobre Cbb'. Pero bb' es atómico sobre C, de modo que, por el lema 15.1, abb' es atómico sobre C. En particular lo es entonces ab.

Proposición 15.3 *Si B es construible sobre A, entonces B es atómico sobre A.*

Prueba. Sea $(b_i : i < \alpha)$ una construcción de B sobre A. Vemos por inducción en i que para cada $i \leq \alpha$, $b_{<i}$ es atómico sobre A. Ello es claro para $i = 0$ y para i límite. Supongamos que $b_{<i}$ es atómico sobre A y veamos que también lo es $b_{<i+1} = b_{<i} \cup \{b_i\}$. Pero ello se sigue del lema 15.2, pues b_i es atómico sobre $Ab_{<i}$.

Proposición 15.4 *Si M es un modelo construible sobre $A \subseteq M$, entonces M es primo sobre A.*

Prueba. Sea $(m_i : i < \alpha)$ una construcción de M sobre A y $A \subseteq N$. Usando el hecho de que cada m_i es atómico sobre $Am_{<i}$, podemos definir una cadena $(f_i : i \leq \alpha)$ de aplicaciones elementales $f_i : Am_{<i} \to N$ siendo f_0 la identidad en A. Entonces f_α es una inmersión elemental de M en N.

Proposición 15.5 *Si A y L son numerables y $A \subseteq M$, entonces son equivalentes:*

(1) M es construible sobre A,

(2) M es primo sobre A,

(3) M es numerable y es atómico sobre A.

Prueba. La equivalencia entre *(2)* y *(3)* se estableció ya en la proposición 10.3. La implicación *(1)* $\Rightarrow$ *(2)* es por la proposición 15.4. Mostraremos *(3)* $\Rightarrow$ *(1)*. Sea $(m_i : i \in \omega)$ una enumeración arbitraria de M y veamos que se trata de una construcción de M sobre A. Como M es atómico sobre A, para cada $i \in \omega$, la tupla $m_0, \ldots, m_i$ es atómica sobre A. Pero entonces m_i es atómico sobre $Am_{<i}$.

Lema 15.6 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) $\mathrm{tp}(a/C) \vdash \mathrm{tp}(a/Cb)$

(2) $\mathrm{tp}(b/C) \vdash \mathrm{tp}(b/Ca)$

(3) $\mathrm{tp}(a/C) \cup \mathrm{tp}(b/C) \vdash \mathrm{tp}(ab/C)$

Prueba. Basta establecer la equivalencia entre *(1)* y *(3)*.
(1) $\Rightarrow$ *(3)*. Supongamos que *(1)* se da, que $a \equiv_C a'$ y que $b \equiv_C b'$. Debemos establecer que $ab \equiv_C a'b'$. Tenemos que $a \equiv_{Cb} a'$, esto es, $ab \equiv_C a'b$. Además podemos obtener a'' tal que $a''b \equiv_C a'b'$. Como $a'' \equiv_C a' \equiv_C a$ podemos usar de nuevo *(1)* para establecer que $a''b \equiv_C a'b \equiv_C ab$. En definitiva, $a'b' \equiv_C a''b \equiv_C ab$.
(3) $\Rightarrow$ *(1)*. Si $a \equiv_C a'$ tenemos por *(3)* que $ab \equiv_C a'b$ y por tanto que $a \equiv_{Cb} a'$.

Definición (Conjunto cerrado en una construcción) Sea $(b_i : i < \alpha)$ una construcción de B sobre A y sea $E \subseteq B$. Decimos que E es *cerrado* (respecto a la construcción) si para cada $b_i \in E$ existe $\varphi(x) \in L(A \cup (E \cap b_{<i}))$ que aísla $\mathrm{tp}(b_i/Ab_{<i})$.

Lema 15.7 *Sea $(b_i : i < \alpha)$ una construcción de B sobre A.*

(1) Una unión arbitraria de cerrados es cerrada.

(2) Para cada $B' \subseteq B$ finito hay $E \subseteq B$ cerrado y finito tal que $B' \subseteq E$.

(3) Si E es cerrado entonces $(b_i : i < \alpha)$ es una construcción de B sobre AE.

Prueba. *(1)* es obvio. Para establecer *(2)* podemos usar *(1)*, de modo que es suficiente con demostrar que para cada $i < \alpha$ existe un conjunto cerrado y finito $E_i \subseteq B$ tal que $b_i \in E_i$. Ello puede hacerse por inducción en i. Supongamos que para todo $j < i$ existe tal E_j. Hay $\varphi(x) \in L(Ab_{<i})$ que aísla $\mathrm{tp}(b_i/Ab_{<i})$. Sean $b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}$ los parámetros de φ en $b_{<i}$. Podemos poner entonces $E_i = \{b_i\} \cup E_{j_1} \cup \ldots \cup E_{j_n}$.
(3). Podemos suponer que $A = \emptyset$. Para $i \leq \alpha$ sea $E_i = E \cap b_{<i}$. Si $b_i \in E$ es claro que b_i es atómico sobre $Eb_{<i}$. Supongamos pues que $b_i \notin E$. Veremos por inducción que para cada $j < \alpha$, $\mathrm{tp}(b_i/b_{<i}) \vdash \mathrm{tp}(b_i/E_j b_{<i})$. De ello se seguirá que $\mathrm{tp}(b_i/b_{<i}) \vdash \mathrm{tp}(b_i/Eb_{<i})$ y por tanto que $\mathrm{tp}(b_i/Eb_{<i})$ es aislado. Los casos $j = 0$ y j límite son claros. Consideremos el caso $j+1$. Sin perder generalidad podemos suponer que $b_j \in E$ pues en otro caso $E_{j+1} = E_j$ y la hipótesis inductiva proporciona el resultado. En particular tenemos que $i \neq j$. En el caso $j < i$ tenemos que $E_{j+1} \subseteq b_{<i}$ de modo que no hay nada que probar. Supongamos así que $j > i$. Como E es cerrado y $b_j \in E$,

$$\mathrm{tp}(b_j/E_j) \vdash \mathrm{tp}(b_j/b_{<j})$$

y como $b_{<i}b_i \subseteq b_{<j}$ vemos que $\mathrm{tp}(b_j/E_j b_{<i}) \vdash \mathrm{tp}(b_j/E_j b_{<i} b_i)$. Por el lema 15.6

$$\mathrm{tp}(b_i/E_j b_{<i}) \vdash \mathrm{tp}(b_i/E_j b_{<i} b_j).$$

Como $E_{j+1} = E_j b_j$ y por hipótesis inductiva $\mathrm{tp}(b_i/b_{<i}) \vdash \mathrm{tp}(b_i/E_j b_{<i})$, se concluye que $\mathrm{tp}(b_i/b_{<i}) \vdash \mathrm{tp}(b_i/E_{j+1} b_{<i})$.

Observación 15.8 *Sea $(b_i : i < \alpha)$ una construcción de B sobre A. Si $(c_i : i < \beta)$ es una enumeración de B en la que para cada δ límite $\{c_i : i < \delta\}$ es cerrado (respecto a la primera construcción), entonces también $(c_i : i < \beta)$ es una construcción de B sobre A. Por tanto, si un conjunto de cardinal κ es construible sobre A entonces posee una construcción sobre A de longitud κ.*

Teorema 15.9 *Si M y N son construibles sobre A, entonces $M \cong_A N$.*

Prueba. Sea $(m_i : i < \alpha)$ una construcción de M sobre A y $(n_i : i < \beta)$ una construcción de N sobre A. Usando el lema de Zorn vemos que existe una aplicación elemental y exhaustiva maximal $f : E \to F$ donde E es un subconjunto cerrado de M, F es un subconjunto cerrado de N y f extiende a la identidad en A. Supongamos que $E \neq M$. La situación es simétrica respecto a la hipótesis $F \neq N$, de modo que bastará mostrar que ello conduce a contradicciones. Sea $a \in M \setminus E$. Por el lema 15.7 sabemos que existe un conjunto cerrado E_0 tal que $E \subseteq E_0 \subseteq M$ y $E_0 \setminus E$ es finito. Por el lema 15.7 sabemos que $(m_i : i < \alpha)$ es una construcción sobre E y por el lema 15.4 que M es atómico sobre E. Por tanto existe $F_0 \subseteq N$ tal que $F \subseteq F_0$ y $F_0 \setminus F$ es finito y existe $f_0 : E_0 \to F_0$ elemental y exhaustiva que extiende a f. Puede ser que F_0 no sea cerrado pero existe $F_1 \subseteq N$ cerrado tal que $F_0 \subseteq F_1$

y $F_1 \smallsetminus F_0$ es finito. Por el lema 10.2 vemos que N es atómico sobre F_0. Por tanto podemos proseguir obteniendo ahora $E_1 \subseteq M$ con $E_0 \subseteq E_1$ y $f_1 : E_1 \to F_1$ exhaustiva y elemental que extiende a f_0. Iterando se obtienen aplicaciones elementales exhaustivas $f_n : E_n \to F_n$, $(n \in \omega)$ de modo que E_n es cerrado si n es par y F_n lo es si n es impar. Si $E' = \bigcup_{n\in\omega} E_n$, $F' = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ y $f' = \bigcup_{n\in\omega} f_n$, entonces E' y F' son cerrados y $f' : E' \to F'$ es elemental y exhaustiva.

Definición (Teoría aislada) T es *aislada* si para cada A los tipos aislados son densos en $S_1(A)$.

Proposición 15.10 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) T es aislada,

(2) Para cada A existe un modelo construible sobre A,

(3) Para cada A existe un modelo atómico sobre A,

(4) Para cada A y cada n, los tipos aislados son densos en $S_n(A)$.

Prueba. *(1) ⇒ (2)*. Sea $\kappa = |A| + |T|$. Construimos una cadena $(A_n : n < \omega)$ de conjuntos A_n de modo que $A = A_0$, que toda fórmula $\varphi(x) \in L(A_n)$ consistente sea realizada en A_{n+1} y que para todo $n \in \omega$, $A_{n+1} \smallsetminus A_n$ posea una enumeración $(a_i^n : i < \kappa)$ en la cual cada a_i^n sea atómico sobre $A_n a_{<i}^n$. Entonces $M = \bigcup_{n<\omega} A_n$ será un modelo construible sobre A. Veamos cómo obtener A_{n+1} a partir de A_n. Enumeramos las fórmulas consistentes $\varphi_i(x) \in L(A_n)$, $(i < \kappa)$. Se define entonces a_i^n como una realización de p, siendo $p = p(x) \in S_1(A_n a_{<i}^n)$ un tipo aislado tal que $\varphi_i \in p$.
(2) ⇒ (3). Se sigue del lema 15.3.
(3) ⇒ (4). Supongamos que M es atómico sobre A y $\varphi(x) \in L_n(A)$ es consistente. Entonces existe una realización a de φ en M. En ese caso $p = \mathrm{tp}(a/A)$ es aislado y $\varphi \in p$. Por último *(4) ⇒ (1)* es obvio.

Proposición 15.11 *Si T es aislada y $M \supseteq A$ es primo sobre A, entonces M es atómico sobre A.*

Prueba. Sea $M \supseteq A$ primo sobre A. Como T es aislada, existe $N \supseteq A$ que es atómico sobre A. Como hay una inmersión elemental $f : M \to N$ que es la identidad en A, también M es atómico sobre A.

Proposición 15.12 *Si L es numerable, entonces son equivalentes:*

(1) T es aislada,

(2) Para cada A numerable los tipos aislados son densos en $S_1(A)$,

(3) Para cada A (numerable) existe un modelo primo sobre A.

Prueba. *(1) ⇔ (2).* Sea $\varphi(x) \in L(A)$ consistente y supongamos que en $[\varphi]_A = \{p \in S_1(A) : \varphi \in p\}$ no hay puntos aislados. Eso significa que para cada $\psi(x) \in L(A)$ consistente con $\varphi(x)$ existe $\chi(x) \in L(A)$ tal que tanto $\varphi(x) \wedge \psi(x) \wedge \chi(x)$ como $\varphi(x) \wedge \psi(x) \wedge \neg\chi(x)$ son consistentes. Esta es una propiedad de A y como L es numerable es claro que existe un subconjunto numerable B de A con esa propiedad y con $\varphi(x) \in L(B)$. Entonces $[\varphi(x)]_B$ no tiene puntos aislados.
(1) ⇒ (3). Por la proposición 15.10 hay un modelo construible sobre cualquier A y por la proposición 15.4 este modelo es primo sobre A.
(3) ⇒ (2). Si para cada A numerable hay un modelo primo sobre A, entonces, por la proposición 15.5 para cada A numerable hay un modelo atómico sobre A. Se razona entonces como en *(3) ⇒ (4)* de la prueba de la proposición previa.

Proposición 15.13 *Las teorías totalmente trascendentes son aisladas.*

Prueba. Sea $\varphi(x) \in L(A)$ consistente y sea $\psi(x) \in L(A)$ de rango de Morley mínimo y de grado mínimo en su rango, consistente y con la propiedad de que $\models \psi \rightarrow \varphi$. Entonces ψ es un átomo. También se puede argumentar topológicamente dado que en los espacios dispersos el conjunto de los puntos aislados es denso.

Corolario 15.14 *Si T es totalmente trascendente y $M \supseteq A$ es primo sobre A, entonces M es atómico sobre A.*

Prueba. Por la proposición 15.13 y la proposición 15.11.

Capítulo 16

Teorías ω_1-categóricas

Definición (Extensiones primas) $M' \succ M$ es una *extensión prima* de M si $M \neq M'$ y para cada $N \succ M$ tal que $M \neq N$, existe una inmersión elemental de M' en N que es la identidad en M. Se dice que la teoría T *tiene extensiones primas* si todo modelo de T tiene una extensión prima.

Proposición 16.1 *(1) Si T es totalmente trascendente y no tiene pares de Vaught, T tiene extensiones primas.*

(2) Si T tiene extensiones primas, T es λ-categórica para cada $\lambda \geq |T|^+$.

Prueba. *(1).* Sea $M \models T$. Como T es totalmente trascendente, el espacio $S_1(M)$ es disperso y existe por ello $p \in S_1(M)$ con rango de Cantor-Bendixson 1. Eso significa que existe una fórmula $\varphi \in p$ que permite caracterizar a p como el único tipo no aislado sobre M que contiene a φ. Sea $a \models p$. Como T es totalmente trascendente, T es aislada y por ello existe un modelo M' que es primo sobre Ma. Veremos que M' es una extensión prima de M. Como p no es aislado es claro que $a \notin M$, de modo que $M \neq M'$. Sea $N \succ M$ una extensión elemental propia de M. Si p no se realizara en N resultaría que $\varphi(M) = \varphi(N)$ y habríamos obtenido un par de Vaught para φ. Como en T no hay pares de Vaught, hay $b \in N$ que realiza p. Entonces la aplicación $f = id_M \cup \{(a, b)\}$ es elemental. Como M' es primo sobre Ma, esta aplicación se extiende a una inmersión elemental de M' en N.
(2). Sea M_0 un modelo arbitrario de T de cardinalidad $\leq |T|$ y sea $(M_i : i \leq \lambda)$ una cadena elemental continua de modelos M_i construidos de modo que M_{i+1} sea una extensión prima de M_i. Llamamos a esta cadena *torre* de longitud λ. Si $N \succ M_0$ es un modelo de cardinalidad $< \lambda$ podemos obtener $\delta < \lambda$ y una cadena $(f_i : i \leq \delta)$ de aplicaciones elementales $f_i : M_i \to N$ de modo que f_δ sea exhaustiva. Eso quiere decir que $N \cong M_\delta$. Sea ahora $N \succ M_0$ un modelo arbitrario de T de cardinalidad λ. Podemos descomponer N es una cadena elemental $(N_i : i < \lambda)$ con $N_0 = M_0$, $|N_i| < \lambda$ y con $N = \bigcup_{i<\lambda} N_i$. Por lo ya establecido podemos obtener una sucesión creciente de ordinales $(\alpha_i : i < \lambda)$ con $\alpha_i < \lambda$ y una correspondiente cadena de aplicaciones elementales $f_i : M_{\alpha_i} \to N$ de modo que para cada i, $\mathrm{rec} f_i = N_i$. Obviamente $f = \bigcup_{i<\lambda} f_i$ es un isomorfismo entre M_λ y N. De este modo hemos visto que salvo isomorfía sobre M_0 hay un único modelo $N \succ M_0$ de cardinalidad λ. Consideremos ahora dos modelos arbitrarios M y N de T, ambos de cardinalidad λ. Los podemos descomponer en torres de longitud λ, $M = \bigcup_{i<\lambda} M_i$, $N = \bigcup_{i<\lambda} N_i$, donde M_0 y N_0 son de cardinalidad $\leq |T|$. Entonces existen extensiones elementales $M_0' \succ M_0$

y $N'_0 \succ N_0$ de cardinalidad $\leq |T|$ tales que $M'_0 \cong N'_0$. Como son modelos de cardinalidad $< \lambda$, hay $i < \lambda$ y $j < \lambda$ tales que $M'_0 \cong M_i$ y $N'_0 \cong N_j$. En definitiva, $M_i \cong N_j$. Por lo ya justificado, M es isomorfo a N.

Proposición 16.2 *(1) Si T es λ-estable y $\lambda \geq |T|, \kappa^+$, entonces T tiene un modelo k^+-saturado de cardinalidad λ.*

(2) Si T es λ-categórica entonces T es κ-estable para todo κ tal que $\lambda > \kappa \geq |T|$.

(3) Si T es numerable y λ-categórica y $\lambda \geq \omega_1$, entonces el modelo de T de cardinalidad λ es saturado.

Prueba. *(1).* Construimos una cadena elemental $(M_i : i < \kappa^+)$ de modelos M_i de cardinalidad λ de modo que todo $p \in S(M_i)$ se realice en M_{i+1}. Esto es posible porque al ser T una teoría λ-estable, $|S(M_i)| \leq \lambda$ siempre que $|M_i| \leq \lambda$. Si $M = \bigcup_{i<\kappa^+} M_i$, M es κ^+-saturado y tiene cardinalidad λ.
(2). Sea $\lambda > \kappa \geq |T|$ y supongamos que T no es κ-estable. Hay entonces un conjunto A de cardinalidad κ con $|S_1(A)| \geq \kappa^+$. Podemos obtener un modelo M de T de cardinal λ con $A \subseteq M$ y donde se realizan al menos κ^+ tipos sobre A. Por la proposición 12.9 hay también un modelo N de T de cardinal λ en el que para cada $B \subseteq N$ de cardinalidad κ se realizan sólo κ tipos sobre B. Estos modelos M y N no pueden ser isomorfos, de modo que T no es λ-categórica.
(3). Por *(2)* T es ω-estable, de modo que es también λ-estable. Por *(1)* el modelo de T de cardinalidad λ es κ^+-saturado para cada κ tal que $\lambda \geq \kappa^+$. De ello se sigue que es λ-saturado.

Proposición 16.3 *Sea T totalmente trascendente y $|T|^+ \leq |M| \leq \lambda$. Hay entonces $N \succ M$ de cardinalidad λ tal que para cada $A \subseteq M$ de cardinalidad $\leq |T|$, todo $p \in S_1(A)$ que es omitido en M es también omitido en N.*

Prueba. El modelo N puede obtenerse como la unión de una cadena elemental de longitud λ, de modo que basta con establecer que para M existe tal N no necesariamente de cardinalidad λ sino simplemente que sea una extensión propia de M. Comenzamos observando que debe existir una fórmula $\varphi(x) \in L_1(M)$ tal que $|\varphi(M)| > |T|$ pero para cada $\psi(x) \in L_1(M)$ o bien $|\varphi(M) \cap \psi(M)| \leq |T|$ o bien $|\varphi(M) \smallsetminus \psi(M)| \leq |T|$, pues en caso contrario podríamos construir un árbol binario $(\varphi_s(x) : s \in {}^{<\omega} 2)$ de fórmulas $\varphi_s(x) \in L(M)$ con $|\varphi_s(M)| > |T|$, $\models \varphi_s \leftrightarrow (\varphi_{s^\frown 0} \vee \varphi_{s^\frown 1})$ y $\models \neg(\varphi_{s^\frown 0} \wedge \varphi_{s^\frown 1})$ lo cual, por la proposición 14.8, es imposible si T es totalmente trascendente. Sea ahora $q = q(x)$ el conjunto de fórmulas $\psi(x) \in L(M)$ tales que $|\varphi(M) \cap \psi(M)| > |T|$. Por elección de φ, $q(x)$ es un tipo completo sobre M. Además q no es realizado en M. Sea $a \models q$ y sea N un modelo primo sobre Ma (que existe porque T es totalmente trascendente). Veremos que N cumple las condiciones exigidas. Sea $A \subseteq M$ de cardinalidad $\leq |T|$ y $p = p(y) \in S(A)$. Supongamos que $b \in N$ realiza p y veremos que p también se realiza en M. Como N es atómico sobre Ma hay $\psi(x, y) \in L(M)$ tal que $\psi(a, y)$ aísla $\mathrm{tp}(b/Ma)$. Entonces $q(x) \cup \{\psi(x, y)\} \vdash p(y)$ y, como $|p(y)| \leq |T|$, hay $q_0 \subseteq q$ tal que $|q_0| \leq |T|$ y $q_0(x) \cup \{\psi(x, y)\} \vdash p(y)$. Podemos suponer además que $q_0 \vdash \exists y \psi(x, y)$. Dado que todo subconjunto de q de cardinalidad $\leq |T|$ se realiza en M, hay $a' \in M$ que realiza q_0. Si $b' \in M$ se escoge de modo que $\models \psi(a', b')$ resulta que b' realiza p.

Teorema 16.4 (Teorema de Morley) *Si T es numerable, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) T es ω-estable y no tiene pares de Vaught.

(2) T tiene extensiones primas.

(3) Todo modelo numerable de T tiene una extensión prima.

(4) T es λ-categórica para todo $\lambda \geq \omega_1$.

(5) T es λ-categórica para algún $\lambda \geq \omega_1$.

(6) T es ω_1-categórica.

Prueba. *(1) $\Rightarrow$ (2)*. Por la proposición 14.10 y la proposición 16.1.
(2) $\Rightarrow$ (4). Por la proposición 16.1.
(4) $\Rightarrow$ (5) y *(2) $\Rightarrow$ (3)* son claros.
(5) $\Rightarrow$ (6). Por la proposición 16.2 T es ω-estable y por tanto totalmente trascendente. Supongamos que T no es ω_1-categórica pero que es λ-categórica para algún $\lambda \geq \omega_1$. Entonces T tiene un modelo de cardinalidad ω_1 que no es saturado. Por la proposición 16.3, T tiene un modelo de cardinalidad λ que no es ω_1-saturado. Pero por la proposición 16.2 el modelo de T de cardinalidad λ debe ser saturado.
(6) $\Rightarrow$ (1). Por la proposición 13.4 sabemos que T no tiene pares de Vaught y por la proposición 16.2 que T es ω-estable.
(3) $\Rightarrow$ (6). Como la prueba del punto *(2)* de la proposición 16.1 tomando los modelos M_i y N_i siempre numerables.

Corolario 16.5 *Sea T numerable y A numerable. Entonces T es ω_1-categórica si y sólo si $T(A)$ es ω_1-categórica.*

Prueba. T es ω-estable si y sólo si $T(A)$ lo es y además T tiene un par de Vaught si y sólo si $T(A)$ tiene uno.

Proposición 16.6 *Si T es una teoría numerable ω_1-categórica, entonces $I(T, \omega) \leq \omega$.*

Prueba. Sea M_{ω_1} el modelo de T de cardinal ω_1. Como T es totalmente trascendente tiene un modelo primo $M_0 \prec M_{\omega_1}$. En la prueba de la proposición 16.1 se vio que existe una cadena elemental continua $(M_i : i < \omega_1)$ de modelos numerables M_i de modo que $M_{\omega_1} = \bigcup_{i<\omega_1} M_i$ y de modo que M_{i+1} sea siempre una extensión prima de M_i. Todo modelo numerable de T es isomorfo a un modelo de esta torre. Veremos que de hecho en la torre salvo isomorfía sólo aparecen una cantidad numerable de modelos numerables. Como T es ω-estable, T tiene un modelo numerable saturado N. Obviamente hay $i < \omega_1$ tal que $N \cong M_i$. M_{i+1} tiene una extensión elemental numerable saturada. Esa extensión es isomorfa entonces a un M_{i+j} para algún $j > 0$. Por tanto hay $j > 0$ tal que $M_i \cong M_{i+j}$. Podemos construir una torre de longitud ω_1 comenzando con $M_i, M_{i+1}, \ldots, M_{i+j}$ y repitiendo siempre con período $j + 1$ estos tipos de isomorfía. La razón es que en los límites volvemos a obtener un modelo numerable saturado y, por tanto, isomorfo a M_i. Al hacer la unión se obtiene un modelo isomorfo a M_{ω_1}. Por tanto podemos suponer que esta es la situación en la torre con la que trabajamos a partir del punto M_i. Pero esto da en total $\leq \omega$ tipos de isomorfía de modelos en la torre.

Definición (Conjuntos minimales y fuertemente minimales) Sea $\varphi(x) \in L(M)$. Decimos que $\varphi(x)$ es *minimal en* M si $\varphi(M)$ es infinito pero para cada $\psi(x) \in L(M)$, $\varphi(M) \cap \psi(M)$ es finito o bien $\varphi(M) \smallsetminus \psi(M)$ es finito. La fórmula $\varphi(x)$ es *fuertemente minimal en* M si es minimal en todo $N \succ M$. Decimos que el conjunto $D \subseteq M$ es minimal (fuertemente minimal) en M si se define mediante alguna fórmula minimal (fuertemente minimal) $\varphi(x) \in L(M)$. Obsérvese que las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) φ es fuertemente minimal en algún M tal que $\varphi \in L(M)$.

(2) φ es fuertemente minimal en todo M tal que $\varphi \in L(M)$.

(3) φ es minimal en todo M tal que $\varphi \in L(M)$.

(4) φ es minimal en $\mathfrak{C}$.

Si φ tiene alguna de estas propiedades equivalentes decimos que φ es una *fórmula fuertemente minimal* y que $\mathfrak{D} = \varphi(\mathfrak{C})$ es una *clase fuertemente minimal*.

Lema 16.7 *Sea* $\varphi(x) \in L(M)$

(1) φ *es minimal en* M *si y sólo si hay un único punto de acumulación* $p \in S(M)$ *con* $\varphi \in p$*, es decir, si y sólo si en el espacio* $S(M)$*,* $\mathrm{CBR}(\varphi) = 1$ *y* $\mathrm{CBD}(\varphi) = 1$.

(2) Si M *es* ω*-saturado y* φ *es minimal en* M*, entonces* φ *es fuertemente minimal.*

(3) $\varphi(x)$ *es fuertemente minimal si y sólo si* $\mathrm{RM}(\varphi) = 1$ *y* $\mathrm{DM}(\varphi) = 1$.

Prueba. Obsérvese que si $\psi(x) \in L(M)$, entonces $\psi(M)$ es infinito si y sólo si $\psi(x)$ pertenece a algún punto de acumulación $p \in S(M)$, es decir, a algún tipo no aislado completo sobre M. De ello se sigue que $p \in S(M)$ es un punto de acumulación si y sólo si p no se realiza en M. Con esto se establece *(1)*. *(2)* es fácil de verificar. *(3)* se sigue de *(1)* y *(2)* teniendo en cuenta que en un modelo ω-saturado RM y CBR coinciden.

Definición (Extensiones minimales) Se dice que M es una *extensión minimal* de $A \subseteq M$ si no hay ningún modelo $N \neq M$ tal que $A \subseteq N \prec M$. Esta noción de minimalidad no tiene nada que ver con las formulas minimales y fuertemente minimales.

Lema 16.8 *Si* T *es aislada y* M *es una extensión minimal de* A*,* M *es primo sobre* A *y es además, salvo isomorfía sobre* A*, el único modelo primo sobre* A.

Prueba. Sea M una extensión minimal de A. Como T es aislada, existe un modelo $N \supseteq A$ que es primo sobre A. Como $A \subseteq M \prec N$, también M es primo sobre A. Pero además $N \cong_A M$. En efecto, existe una inmersión elemental $f : N \to M$ que es la identidad en A. Por minimalidad de M el recorrido de f debe ser M.

Proposición 16.9 *Sea* T *una teoría sin pares de Vaught.*

(1) Para cada $\varphi = \varphi(x, y) \in L$ hay un número natural n_φ tal que para cada a, si $|\varphi(\mathfrak{C}, a)| \geq n_\varphi$, entonces $|\varphi(\mathfrak{C}, a)| \geq \omega$.

(2) Si $\varphi(x) \in L(M)$ es minimal en M, entonces φ es fuertemente minimal.

(3) Sea $\varphi \in L(A)$ y $A \subseteq M$. Si $\varphi(M)$ es infinito, entonces M es una extensión minimal de $\varphi(M) \cup A$.

Prueba. *(1)*. Supongamos que no hay tal n_φ para φ. Entonces para cada $n < \omega$ hay un a_n tal que $n < |\varphi(\mathfrak{C}, a_n)| < \omega$. Ampliando el lenguaje mediante un nuevo predicado monádico U y constantes c se puede efectuar entonces un argumento de compacidad para mostrar la consistencia de los enunciados que expresan que U es un submodelo elemental con $c \in U$ y con $\varphi(U, c) = \varphi(\mathfrak{C}, c)$ y que $\varphi(U, c)$ es infinito. Esto nos da un par de Vaught en T.
(2). Como $T(a)$ tampoco tiene pares de Vaught, podemos suponer que $\varphi(x)$ es una fórmula sin parámetros. Sea $\psi = \psi(x, y) \in L$, y sean n_1 y n_2 los números naturales garantizados por *(1)* para $\varphi(x) \wedge \psi(x, y)$ y para $\varphi(x) \wedge \neg\psi(x, y)$. Como $\varphi(x)$ es minimal en M, el enunciado

$$\forall y(\exists^{<n_1}(\varphi(x) \wedge \psi(x, y)) \vee \exists^{<n_2}(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x, y)))$$

es verdadero en M y por tanto en $\mathfrak{C}$. Ello significa que $\varphi(x)$ es fuertemente minimal.
(3). Es claro que, como T no tiene pares de Vaught, M es una extensión minimal de $\varphi(M) \cup A$.

Lema 16.10 *Sea T es totalmente trascendente y $\psi(x) \in L(M)$ una fórmula que define un subconjunto infinito en M. Hay entonces una fórmula $\varphi(x) \in L(M)$ minimal en M tal que $\models \varphi(x) \rightarrow \psi(x)$*

Prueba. Sea M un modelo de T. Como $\psi(M)$ es infinito, $\psi(x)$ pertenece a algún punto de acumulación $p \in S(M)$. Pero $S(M)$ no es disperso, de modo que hay $p \in S(M)$ de rango de Cantor-Bendixson uno tal que $\psi(x) \in p$. Hay entonces $\varphi(x) \in p$ de rango uno y grado uno tal que $\varphi(x) \rightarrow \psi(x)$.

Proposición 16.11 *Sea T es numerable y ω_1-categórica y sea $\psi(x) \in L$ una fórmula que define un conjunto infinito en M. Entonces hay una fórmula fuertemente minimal $\varphi = \varphi(x, a)$ con $\varphi(x, y) \in L$ y $a \in M$ tal que $\models \varphi(x, a) \rightarrow \psi(x)$ y $\mathrm{tp}(a/\emptyset)$ es aislado. Además M es una extensión minimal de $\varphi(M) \cup \{a\}$.*

Prueba. Sea $N \prec M$ primo. Por el lema 16.10 sabemos que hay $\varphi(x, y) \in L$ y $a \in N$ tales que $\varphi(x, a)$ es minimal en N y $\models \varphi(x, a) \rightarrow \psi(x)$. Por la proposición 16.9, $\varphi(x, a)$ es fuertemente minimal. Como $a \in N$ y N es atómico, $\mathrm{tp}(a/\emptyset)$ es aislado.

Capítulo 17

Clausura algebraica

Definición (Clausura definible y clausura algebraica) Una tupla a es *definible sobre* A si hay una fórmula $\varphi(x) \in L(A)$ tal que $\varphi(\mathfrak{C}) = \{a\}$. Equivalentemente, a es definible sobre A si y sólo si la órbita de A bajo $\mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$ tiene un único elemento. Obviamente, si $a = a_1, \dots, a_n$, entonces a es definible sobre A si y sólo si cada a_i es definible sobre A. La *clausura definible de* A es el conjunto $\mathrm{dcl}(A)$ formado por todos los objetos que son definibles sobre A. Una *fórmula algebraica* es una fórmula $\varphi(x) \in L(\mathfrak{C})$ con $\varphi(\mathfrak{C})$ finito. Un *tipo algebraico* es un tipo $p(x)$ con $p(\mathfrak{C})$ finito. Es fácil ver que un tipo cerrado bajo conjunciones es algebraico si y sólo si contiene una fórmula algebraica. Decimos que una tupla a es *algebraica sobre* A si $\mathrm{tp}(a/A)$ es algebraico, es decir, si la órbita de a bajo $\mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$ es finita. Obsérvese que si $a = a_1, \dots, a_n$, entonces a es algebraico sobre A si y sólo si cada a_i es algebraico sobre A. La *clausura algebraica de* A es el conjunto $\mathrm{acl}(A)$ formado por todos los elementos algebraicos sobre A. Se dice que A es un conjunto *algebraicamente cerrado* si $\mathrm{acl}(A) = A$. Y se dice que A es *algebraicamente independiente sobre* B si para cada $a \in A$, $a \notin \mathrm{acl}((A \smallsetminus \{a\}) \cup B)$ y que es *algebraicamente independiente* si es algebraicamente independiente sobre $\emptyset$.

Proposición 17.1 *(1)* $A \subseteq \mathrm{dcl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(A)$.

(2) Si $A \subseteq B$*, entonces* $\mathrm{dcl}(A) \subseteq \mathrm{dcl}(B)$ *y* $\mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(B)$.

(3) $\mathrm{dcl}(\mathrm{dcl}(A)) = \mathrm{dcl}(A)$ *y* $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$.

(4) $\mathrm{dcl}(A) = \bigcup\{\mathrm{dcl}(X) : X \in [A]^{<\omega}\}$ *y* $\mathrm{acl}(A) = \bigcup\{\mathrm{acl}(X) : X \in [A]^{<\omega}\}$.

(5) $\mathrm{acl}(A) = \bigcap\{M : A \subseteq M\}$.

Prueba. Los puntos *(1)*, *(2)* y *(4)* se justifican con facilidad. También es claro que $\mathrm{dcl}(\mathrm{dcl}(A)) = \mathrm{dcl}(A)$ y que $\mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A))$. Veamos que $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) \subseteq \mathrm{acl}(A)$. Sea a un objeto algebraico sobre $\mathrm{acl}(A)$. Hay entonces una tupla $b \in \mathrm{acl}(A)$ y una fórmula $\varphi(x, y) \in L$ tales que $|\varphi(\mathfrak{C}, b)| < \omega$ y $\models \varphi(a, b)$. Como la tupla b es algebraica sobre A tiene una órbita finita en $\mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$. Sean $b_1, \dots, b_n$ los elementos de esta órbita. Claro está, $|\varphi(\mathfrak{C}, b_i)| < \omega$ para cada i. Como la órbita de a en $\mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$ está contenida en $\varphi(\mathfrak{C}, b_1) \cup \dots \cup \varphi(\mathfrak{C}, b_n)$, se trata de una órbita finita, con lo cual $a \in \mathrm{acl}(A)$.
(5). Es fácil comprobar que $\mathrm{acl}(A) \subseteq M$ para cada M tal que $A \subseteq M$. Veamos que si a es un objeto no algebraico sobre A existe un $M \supseteq A$ tal que $a \notin M$. Sea $M \subseteq A$ un modelo

arbitrario y sea κ su cardinalidad. Como $a \notin \mathrm{acl}(A)$, existe una secuencia $(a_i : i < \kappa^+)$ tal que $\mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(a_i/A)$ y $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Hay por tanto un $i < \kappa^+$ tal que $a_i \notin M$. Como $\mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(a_i/A)$, existe un automorfismo $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$ tal que $f(a_i) = a$. Si $M' = f(M)$, resulta entonces que M' es un modelo que contiene a A y que $a \notin M'$.

Lema 17.2 *Si p es un tipo sobre A y no es algebraico, entonces existe $q \in S(A)$ no algebraico y tal que $p \subseteq q$.*

Prueba. El número de tipos completos algebraicos sobre A es, obviamente, $\leq 2^{|T|+|A|}$ y cada uno de estos tipos tiene sólo un número finito de realizaciones en $\mathfrak{C}$. Por tanto, el número de tuplas $a \models p$ cuyo tipo sobre A es algebraico es $\leq 2^{|T|+|A|}$. Sin embargo en $\mathfrak{C}$ podemos encontrar $> 2^{|T|+|A|}$ realizaciones de p, pues p no es algebraico. Existe, por todo ello, $a \models p$ con $\mathrm{tp}(a/A)$ no algebraico.

Lema 17.3 *(1) Sea $p \in S(A)$. Si p se realiza en A, p es algebraico, y si p es algebraico, p es aislado.*

(2) Sea $p \in S(M)$. Entonces p se realiza en M si y sólo si p es algebraico si y sólo si p es aislado.

(3) $\varphi(x) \in L(M)$ es minimal en M si y sólo si para cada $A \subseteq M$ tal que $\varphi \in L(A)$ hay un único $p \in S(A)$ no algebraico tal que $\varphi \in p$.

Prueba. *(1).* Si $p \in S(A)$ se realiza en A, p tiene una única realización en A y esa única realización en A es también su única realización en $\mathfrak{C}$. Por tanto es algebraico. Y si $p \in S(A)$ es algebraico y elegimos $\varphi(x) \in p$ con $n = |\varphi(\mathfrak{C})|$ mínimo, resulta que $\varphi(x)$ es un átomo sobre A.
(2). Si $p \in S(M)$ y $\varphi(x) \in p$ aísla p, como $M \models \exists x\varphi(x)$, la fórmula $\varphi(x)$ se realiza en M. Entonces también p se realiza en M.
(3). Se sigue del lema 17.2 y de *(2).*

Observación 17.4 *Si $f : A \to B$ es una biyección elemental, entonces f puede extenderse a una biyección elemental $f' : \mathrm{acl}(A) \to \mathrm{acl}(B)$.*

Lema 17.5 *Sea $D \subseteq M$ minimal en M y definido sobre $A \subseteq M$. Si $(a_i : i < \alpha)$ y $(b_i : i < \alpha)$ son secuencias de elementos de D tales que para cada $i < \alpha$, $a_i \notin \mathrm{acl}(Aa_{<i})$ y $b_i \notin \mathrm{acl}(Ab_{<i})$,, entonces la aplicación $f = id_A \cup \{(a_i, b_i) : i < \alpha\}$ es elemental.*

Prueba. Supongamos inductivamente que $f_i = id_A \cup \{(a_j, b_j) : j < i\}$ es elemental y veamos que también lo es $f_{i+1} = f_i \cup \{(a_i, b_i)\}$. Sea $\varphi(x) \in L(A)$ minimal en M y tal que $D = \varphi(M)$. Escojamos b'_i, quizás fuera de M, de modo que $f_i \cup \{(a_i, b'_i)\}$ sea elemental. Como $a_i \notin \mathrm{acl}(Aa_{<i})$, resulta entonces que $b'_i \notin \mathrm{acl}(Ab_{<i})$. Pero hay un único tipo completo no algebraico sobre $Ab_{<i}$ que contiene a φ y tanto $\mathrm{tp}(b'_i/Ab_{<i})$ como $\mathrm{tp}(b_i/Ab_{<i})$ cumplen estas condiciones. Por ello $b_i \equiv_{Ab_{<i}} b'_i$. En definitiva, $a_i a_{<i} \equiv_A b_i b_{<i}$, es decir, f_{i+1} es elemental.

Proposición 17.6 *Sea $\mathfrak{D}$ una clase fuertemente minimal definida sobre A. Si a, b son elementos de $\mathfrak{D}$ y $a \in \mathrm{acl}(Ab) \setminus \mathrm{acl}(A)$, entonces $b \in \mathrm{acl}(Aa)$.*

Prueba. Supongamos que $a \notin \mathrm{acl}(A)$ y que $b \notin \mathrm{acl}(Aa)$. Veremos que $a \notin \mathrm{acl}(Ab)$. Como $a \notin \mathrm{acl}(A)$, hay una familia $(a_i : i < \omega)$ de distintos A-conjugados de a con $a = a_0$. Como $b \notin \mathrm{acl}(Aa)$, por el lema 17.2 existe $b' \equiv_{Aa} b$ tal que $b' \notin \mathrm{acl}(A \cup \{a_i : i < \omega\})$. Por el lema 17.5 tenemos entonces que $a_i b' \equiv_A a_j b'$. Por tanto a tiene infinitos conjugados sobre Ab', esto es $a \notin \mathrm{acl}(Ab')$. Como $ab \equiv_A ab'$ se concluye que $a \notin \mathrm{acl}(Ab)$.

Definición (Pregeometría) Sea Ω una clase y cl una operación que asigna a cada subclase X de Ω una subclase $\mathrm{cl}(X)$ de Ω. Decimos que cl es un *operador de clausura algebraico en* Ω si se cumplen las siguientes condiciones:

(P1) $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$.

(P2) Si $X \subseteq Y$, entonces $\mathrm{cl}(X) \subseteq \mathrm{cl}(Y)$.

(P3) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) \subseteq \mathrm{cl}(X)$.

(P4) Si $a \in \mathrm{cl}(X)$, existe $X_0 \subseteq X$ finito tal que $a \in \mathrm{cl}(X_0)$.

Decimos que cl es una *pregeometría en* Ω o que (Ω, cl) es una *pregeometría* si además se cumple la condición

(P5) Si a, b son elementos de Ω y $a \in \mathrm{cl}(Xb) \setminus \mathrm{cl}(X)$, entonces $b \in \mathrm{cl}(Xa)$.

Supongamos que (Ω, cl) es una pregeometría. Decimos que $a \in \Omega$ es *independiente de* $X \subseteq \Omega$ si $a \notin \mathrm{cl}(X)$. Decimos que $X \subseteq \Omega$ es *independiente* si para cada $a \in X$, a es independiente de $X \setminus \{a\}$. Una *base de* $X \subseteq \Omega$ es un subconjunto independiente maximal de X. Veremos a continuación que todas las bases de X tienen el mismo tamaño, que se llama *dimensión* de X.

Lema 17.7 *Sea (Ω, cl) una pregeometría.*

(1) Si X es independiente y $a \notin \mathrm{cl}(X)$, entonces $X \cup \{a\}$ es independiente.

(2) Si X es minimal con la condición de que $a \in \mathrm{cl}(X)$, entonces para cada $b \in X$, $b \in \mathrm{cl}((X \setminus \{b\}) \cup \{a\})$.

(3) Si X es una base de Z, $X' \subseteq X$ y $a \in Z \setminus \mathrm{cl}(X')$, entonces existe un $b \in X \setminus X'$ tal que $(X \setminus \{b\}) \cup \{a\}$ es una base de Z.

Prueba. *(1)* y *(2)* se siguen de (P5). Nos centramos, por tanto, en la prueba de *(3)*. Por (P4) podemos escoger $X_0 \subseteq X$ finito y de tamaño mínimo con $a \in \mathrm{cl}(X_0)$. Como $a \notin \mathrm{cl}(X')$, por (P2) tenemos que $X_0 \setminus X' \neq \emptyset$. Sea $b \in X_0 \setminus X'$ y veamos que $(X \setminus \{b\}) \cup \{a\}$ es base de Z. Vemos en primer lugar que este conjunto es independiente. Por *(1)*, para ello basta ver que $a \notin \mathrm{cl}(X \setminus \{b\})$. Supongamos lo contrario. Como $a \notin \mathrm{cl}(X_0 \setminus \{b\})$, sabemos por *(1)* que $Y = (X_0 \setminus \{b\}) \cup \{a\}$ es independiente. Como hemos supuesto que $a \in \mathrm{cl}(X \setminus \{b\})$, tenemos por (P2) que $\mathrm{cl}(Y) \subseteq \mathrm{cl}(X \setminus \{b\})$, y podemos usar (P3) para concluir que $b \in \mathrm{cl}(X \smallsetminus \{b\})$, pues por *(2)* sabemos que $b \in \mathrm{cl}(Y)$. Pero esto no es posible, pues X es independiente. Veamos por último que $(X \smallsetminus \{b\}) \cup \{a\}$ es maximal entre los subconjuntos independientes de Z. Para ello consideremos un $z \in Z$ y veamos que $z \in \mathrm{cl}((X \smallsetminus \{b\}) \cup \{a\})$. Sabemos que $z \in \mathrm{cl}(X)$ y que X es independiente. Observemos que, por (P2) y porque $b \in \mathrm{cl}((X \smallsetminus \{b\}) \cup \{a\})$, tenemos que $X \subseteq \mathrm{cl}((X \smallsetminus \{b\}) \cup \{a\})$, y de nuevo por (P3) se concluye que $z \in \mathrm{cl}((X \smallsetminus \{b\}) \cup \{a\})$.

Proposición 17.8 *Sea* (Ω, cl) *una pregeometría.*

(1) Las siguientes condiciones equivalen a que $X \subseteq Z$ sea una base de Z:

(a) X es independiente y $\mathrm{cl}(X) = Z$.

(b) X es un subconjunto minimal de Z con la propiedad de que $\mathrm{cl}(X) = Z$.

(2) Si $X \subseteq Z$ y X es independiente, entonces existe una base X' de Z tal que $X \subseteq X'$.

(3) Si X es una base de Z e Y es un subconjunto finito independiente de Z, entonces existe $X' \subseteq X$ tal que $|X'| = |Y|$ y $(X \smallsetminus X') \cup Y$ es una base de Z.

(4) Si X, Y son bases de Z, entonces $|X| = |Y|$.

Prueba. Las equivalencias del punto *(1)* se establecen fácilmente. *(2)* se obtiene por el lema de Zorn, usando sólo (P4) y (P2). *(3)* se sigue del punto *(3)* del lema previo . *(4)* se sigue de *(3)* si alguna de las bases es finita. Supongamos que las dos bases X e Y son infinitas. Para cada $a \in X$ existe $Y_a \subseteq Y$ finito tal que $a \in \mathrm{cl}(Y_a)$. Entonces $X \subseteq \bigcup_{a \in X} Y_a$ de modo que $\bigcup_{a \in X} Y_a$ es una base de Z también. Como está contenida en Y debe coincidir con Y. Así $|Y| = |\bigcup_{a \in X} Y_a| \geq |X| \cdot \omega = |X|$. Análogamente se ve que $|X| \geq |Y|$.

Proposición 17.9 *Si $D \subseteq M$ es un subconjunto fuertemente minimal definido sobre $A \subseteq M$, y definimos para $X \subseteq D$, $\mathrm{cl}_A(X) = \mathrm{acl}(A \cup X) \cap D$ entonces $D_A = (D, \mathrm{cl}_A)$ es una pregeometría.*

Prueba. Es consecuencia de las proposiciones 17.1 y 17.6.

Proposición 17.10 *Si $\mathfrak{D}$ es una clase fuertemente minimal definida sobre A.*

(1) Si $(a_i : i < \alpha)$ es una secuencia de elementos de $\mathfrak{D}$ tal que para cada $i < \alpha$, $a_i \notin \mathrm{acl}(Aa_{<i})$, entonces $\{a_i : i < \alpha\}$ es algebraicamente independiente sobre A.

(2) Si X_1, X_2 son subconjuntos de $\mathfrak{D}$ algebraicamente independientes sobre A y f es una biyección arbitraria entre X_1 y X_2, entonces $id_A \cup f$ es elemental.

Prueba. *(1)* Se muestra inductivamente que para cada $i \leq \alpha$, $a_{<i} = \{a_j : j < i\}$ es algebraicamente independiente sobre A. Supongamos que $a_{<i}$ lo es. Como $a_i \notin \mathrm{acl}(Aa_{<i})$ podemos usar el punto *(1)* del lema 17.7 para garantizar que también $a_{<i+1} = a_{<i} \cup \{a_i\}$ lo es. El punto *(2)* se sigue inmediatamente del lema 17.5.

Capítulo 18

El teorema de Baldwin-Lachlan

Definición (Dimension) Si $\varphi(x) \in L(A)$ es una fórmula fuertemente minimal, su *dimensión en un modelo* $M \supseteq A$ es por definición la dimensión de la pregeometría $D_A = (D, \mathrm{cl}_A)$ donde $D = \varphi(M)$ y $\mathrm{cl}_A(X) = \mathrm{acl}(X \cup A) \cap D$ para $X \subseteq D$. Usamos para referirnos a ella la notación $\dim_\varphi(M/A)$. En el caso $A = \emptyset$ ponemos simplemente $\dim_\varphi(M)$.

Proposición 18.1 *Sea T ω_1-categórica y numerable con una fórmula $\varphi(x) \in L$ fuertemente minimal.*

(1) Si X es una base de $\varphi(M)$, M es una extensión minimal de X. Por tanto M es, salvo isomorfía sobre X, el único modelo primo sobre X.

(2) $M_1 \precsim M_2$ si y sólo si $\dim_\varphi(M_1) \leq \dim_\varphi(M_2)$

(3) $M_1 \cong M_2$ si y sólo si $\dim_\varphi(M_1) = \dim_\varphi(M_2)$.

Prueba. *(1)*. Si N es un modelo que contiene a X es claro que $\varphi(M) \subseteq \mathrm{acl}(X) \subseteq M$. El resultado se sigue entonces del lema 16.8. Los puntos *(2)* y *(3)* se siguen inmediatamente de *(1)* por la proposición 17.10.

Lema 18.2 *Sea $\mathfrak{D}$ una clase fuertemente minimal definida sobre A, $\mathrm{acl}(A) \cap \mathfrak{D}$ infinito y $p \in S(A)$. Entonces p es aislado si y sólo si p es algebraico.*

Prueba. Sea $\varphi(x) \in L(A)$ fuertemente minimal y tal que $\mathfrak{D} = \varphi(\mathfrak{C})$. Ya sabemos que todo tipo algebraico es aislado. Supongamos que p es aislado pero no algebraico. Sea $\theta(x) \in p$ una fórmula que aísla p. Si $a \in \mathrm{acl}(A) \cap \mathfrak{D}$, entonces $a \not\models p$ (pues p no es algebraico pero $a \in \mathrm{acl}(A)$) y por consiguiente $\models \neg\theta(a)$. Así pues $\{a \in \mathfrak{D} :\models \neg\theta(a)\}$ es infinito. Como $\mathfrak{D}$ es fuertemente minimal, $\{a \in \mathfrak{D} :\models \theta(a)\}$ es finito, es decir, $(\varphi(x) \wedge \theta(x))$ es algebraica. Pero entonces p es algebraico, pues $(\varphi(x) \wedge \theta(x)) \in p$.

Proposición 18.3 *Sea T una teoría numerable ω_1-categórica que posee una fórmula $\varphi(x) \in L$ fuertemente minimal.*

(1) *M es κ-saturado si y sólo si* $\dim_\varphi(M) \geq \kappa$.

(2) *M es primo si y sólo si para todo N,* $\dim_\varphi(M) \leq \dim_\varphi(N)$.

(3) *Sea M_0 el modelo primo de T y $M_\omega \succ M_0$ el modelo numerable saturado de T. Si T no es ω-categórica, $n_0 = \dim_\varphi(M_0)$ es finita y existe una cadena elemental $(M_i : i < \omega)$ tal que $\dim_\varphi(M_i) = n_0 + i$, $M_\omega = \bigcup_{i<\omega} M_i$ y todo modelo numerable de T es isomorfo a algún M_i $(1 \leq i \leq \omega)$.*

(4) *Si T no es ω-categórica, entonces $I(T, \omega) = \omega$.*

Prueba. *(1)*. Sea $|M| > \omega$. Si $|M| \geq \kappa$, entonces M es κ-saturado (proposición 16.2) y, meramente por motivos de cardinalidad, tiene dimensión $\geq \kappa$. Obviamente, si $\kappa < |M|$, entonces M ni puede ser κ-saturado ni puede tener dimensión $\geq \kappa$. Consideremos entonces el caso M numerable. Sea M ω-saturado. Escojamos, en un modelo de cardinalidad $> \omega$, una secuencia $(a_i : i < \omega)$ de elementos algebraicamente independientes tales que $\models \varphi(a_i)$. Por ω-saturación de M debe haber una secuencia $(a'_i : i < \omega)$ en M tal que $(a_i : i < \omega) \equiv (a'_i : i < \omega)$. Claro está, ello implica que $\dim_\varphi(M) \geq \omega$. Por último, supongamos que $\dim_\varphi(M) \geq \omega$ y veamos que M es saturado. Como M es numerable, de hecho $\dim_\varphi(M) = \omega$. Sea N el modelo numerable saturado de T. También $\dim_\varphi(N) = \omega$ y por el punto *(3)* de la proposición 18.1, $M \cong N$. Así M es saturado.
(2). Por el punto *(2)* de la proposición 18.1, sabemos que si $M \prec N$, entonces $\dim_\varphi(M) \leq \dim_\varphi(N)$. Usando el punto *(3)* de esa misma proposición se tiene entonces el resultado.
(3). Si $\dim_\varphi(M_0) = \omega$, entonces cualquier otro modelo numerable N de T tiene también dimensión ω, pues $\dim_\varphi(M_0) \leq \dim_\varphi(N)$. Pero entonces T es ω-categórica. Así pues, $n_0 = \dim_\varphi(M_0) < \omega$. Sea $m = n_0 + i$ y sean $a_1, \ldots, a_m$ elementos algebraicamente independientes que realizan $\varphi(x)$, escogidos, por ejemplo, en el modelo numerable saturado de T. Sea N_i un modelo primo sobre $a_1, \ldots, a_m$. Vamos a ver que $\dim_\varphi(N_i) = n_0 + i$. Para ello basta ver que $\{a_1, \ldots, a_m\}$ es una base de $\varphi(N_i)$. Si no lo fuera existiría un $a \in \varphi(N_i)$ tal que $a \notin \mathrm{acl}(a_1, \ldots, a_m)$. Por el punto *(2)* de la proposición 18.1 podemos suponer que $M_0 \prec N_i$ y de hecho que $\{a_1, \ldots, a_{n_0}\}$ es una base de $\varphi(M_0)$. Entonces $\varphi(M_0) \subseteq \mathrm{acl}(a_1, \ldots, a_n) \cap \varphi(\mathfrak{C})$ de modo que esa intersección es infinita. Podemos usar entonces el lema 18.2 para garantizar que $\mathrm{tp}(a/a_1, \ldots, a_n)$ no es aislado. Pero en ese caso $a \notin N_i$, pues N_i es atómico sobre $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Establecido entonces que existe N_i con $\dim_\varphi(N_i) = n_0 + i$, podemos construir inductivamente una cadena elemental $(M_i : i < \omega)$ de modo que $\dim_\varphi(M_i) = n_0 + i$. Como $M_\omega = \bigcup_{i<\omega} M_i$ tiene dimensión infinita, es saturado.
(4). Se sigue inmediatamente de *(3)*.

Observación 18.4 *Se dice que la teoría T es* fuertemente minimal *si la fórmula $x = x$ es fuertemente minimal en T. Es fácil ver que si T es fuertemente minimal entonces T es λ-categórica en todo $\lambda > |T|$.*

Lema 18.5 *Sea $\varphi(x) \in L(A)$, $A \subseteq M$, M atómico sobre $\varphi(M) \cup A$ y $X \subseteq \mathfrak{D} = \varphi(\mathfrak{C})$. Entonces $\mathrm{tp}(X/\varphi(M)A) \vdash \mathrm{tp}(X/M)$ y $\mathrm{acl}(X\varphi(M)A) \cap \mathfrak{D} = \mathrm{acl}(XM) \cap \mathfrak{D}$.*

Prueba. Vemos primero cómo la segunda afirmación se sigue de la primera. Basta mostrar que si $a \in \mathfrak{D} \smallsetminus \mathrm{acl}(X\varphi(M)A)$, entonces $a \notin \mathrm{acl}(XM)$. Aplicando la primera afirmación vemos que $\mathrm{tp}(Xa/\varphi(M)A) \vdash \mathrm{tp}(Xa/M)$ y por tanto $\mathrm{tp}(a/X\varphi(M)A) \vdash \mathrm{tp}(a/XM)$. Supongamos que $\mathrm{tp}(a/X\varphi(M)A)$ no es algebraico. Como este tipo puede extenderse a un tipo no algebraico sobre XM, se concluye que $\mathrm{tp}(a/XM)$ no es algebraico. Mostramos ahora la primera afirmación. Por la proposición 15.6 basta ver que $\mathrm{tp}(M/\varphi(M)A) \vdash \mathrm{tp}(M/X\varphi(M)A)$. Podemos suponer que $A = \emptyset$. Sea $m \in M$ una tupla. Como M es atómico sobre $\varphi(M)$ existe una tupla $a \in \varphi(M)$ y una fórmula $\theta(x, y) \in L$ tal que $\models \theta(m, a)$ y $\theta(x, a) \vdash \mathrm{tp}(m/\varphi(M))$. Queremos ver que $\mathrm{tp}(m/\varphi(M)) \vdash \mathrm{tp}(m/\varphi(M)X)$. Supongamos que esto no es así. Entonces hay una extensión a' de a en $\varphi(M)$, una tupla $c \in X$, una tupla m' y una fórmula $\psi(x, y, z) \in L$ tales que

$$\models (\theta(m', a) \wedge \psi(m, a', c) \wedge \neg\psi(m', a', c)).$$

Entonces $\models \exists z \exists x'(\theta(x', a) \wedge \psi(m, a', z) \wedge \neg\psi(x', a', z))$, de manera que podemos suponer que $m' \in M$ y existe $c' \in \varphi(M)$ tal que $\models (\psi(m, a', c') \wedge \neg\psi(m', a', c'))$ lo cual contradice al hecho de que $m \equiv_{\varphi(M)} m'$.

Lema 18.6 *Sea T numerable y ω_1-categórica, sea $\varphi(x) \in L(A)$ fuertemente minimal y $A \subseteq M$.*

(1) Si $M \prec N$, entonces $\dim_\varphi(N/M) = \dim_\varphi(N/\varphi(M)A)$

(2) Si $M \prec N$, entonces $\dim_\varphi(N/A) = \dim_\varphi(N/M) + \dim_\varphi(M/A)$.

(3) Si N es una extensión prima de M, entonces $\dim_\varphi(N/M) = 1$.

(4) Si $(M_i : i \leq \alpha)$ es una cadena elemental continua y $M = M_0$, entonces

$$\dim_\varphi(M_\alpha/M) = \sum_{i<|\alpha|} \dim_\varphi(M_{i+1}/M_i).$$

(5) Si $(M_i : i \leq \alpha)$ es una cadena elemental continua de extensiones primas con $M = M_0$, entonces $\dim_\varphi(M_\alpha/M) = |\alpha|$.

Prueba. *(1)* es consecuencia del lema 18.5 dado que M es primo sobre $\varphi(M)A$.
(2). Sea $D = \varphi(N)$ y $D' = \varphi(M)$. Sea X una base de $\varphi(M)$ en la pregeometría D'_A. Entonces $X \subseteq D$ es un conjunto independiente en la pregeometría D_A y podemos por tanto extender X a una base Y de $\varphi(N)$ en D_A. Así $\dim_\varphi(M/A) = |X|$ y $\dim_\varphi(N/A) = |Y|$. Es fácil ver que $Y \smallsetminus X$ es una base de $\varphi(N)$ en $D_{\varphi(M)A}$. Usando *(1)* vemos entonces que $\dim_\varphi(N/M) = \dim_\varphi(N/\varphi(M)A) = |Y \smallsetminus X|$.
(3). Basta ver que existe una extensión elemental N de M con $\dim_\varphi(N/M) = 1$. Sea $a \in \varphi(\mathfrak{C}) \smallsetminus M$ y sea N primo sobre Ma. Usando el lema 18.2 vemos que $\{a\}$ es una base de $D = \varphi(N)$ en la pregeometría D_M. Por tanto $\dim_\varphi(N/M) = 1$.
(4). Sea $D = \varphi(M_\alpha)$ y para cada $i < \alpha$ sea X_i una base de $\varphi(M_{i+1})$ en la pregeometría $D_{\varphi(M_i)A}$. Por *(1)* $|X_i| = \dim_\varphi(M_{i+1}/\varphi(M_i)A) = \dim_\varphi(M_{i+1}/M_i)$. Por inducción podemos ver fácilmente que para cada $i \leq \alpha$, $\varphi(M_i) \subseteq \mathrm{acl}(A \cup \varphi(M) \cup \bigcup_{j<i} X_j)$. Por otro lado $\bigcup_{i<\alpha} X_i$ es independiente en $D_{\varphi(M)A}$. Por tanto $\bigcup_{i<\alpha} X_i$ es una base de $\varphi(M_\alpha)$ en $D_{\varphi(M)A}$. Como además $X_i \cap X_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$, utilizando *(1)* de nuevo se tiene el resultado.
(5). Se sigue de *(1)*, *(3)* y *(4)*.

Observación 18.7 *Sea T numerable y ω_1-categórica. Todo modelo M tiene salvo isomorfía sobre M una única extensión prima N. Esta extensión prima se caracteriza salvo isomorfía sobre M por la condición $\dim_\varphi(N/M) = 1$ para alguna (para cada) fórmula fuertemente minimal $\varphi \in L(M)$.*

Proposición 18.8 *Sea T numerable y ω_1-categórica y $\varphi(x) \in L(A)$ fuertemente minimal. Si $M \prec N$, entonces* $\dim_\varphi(N/M)$ *coincide con*

$$\text{máx}\{|\alpha| : M_0 = M \text{ y } M_\alpha = N \text{ para alguna cadena elemental estricta } (M_i : i \leq \alpha)\}.$$

Prueba. Sabemos que existe una cadena elemental continua de extensiones primas $(M_i : i \leq \alpha)$ con $M_0 = M$ y $M_\alpha = N$. Por el lema 18.6, $\dim_\varphi(N/M) = |\alpha|$. Además cualquier cadena elemental que comienza en M y acaba en N puede extenderse a una cadena elemental continua de extensiones primas.

Lema 18.9 *Sea T numerable y ω_1-categórica. Sean $\varphi(x, y) \in L$ y $a \in \mathfrak{C}$ tales que $\varphi(x, a)$ es fuertemente minimal y sea $p = \mathrm{tp}(a/\emptyset)$. Entonces para cada tipo completo sobre $\emptyset$ $q(x, y) \supseteq p(x) \cup p(y)$ existe un entero n_q tal que para M cualesquiera $bc \models q$ en M,*

$$\dim_{\varphi(x,b)}(M/b) = \dim_{\varphi(x,c)}(M/c) + n_q.$$

Prueba. Sea $M_0 \prec M$ primo sobre bc. Si T es ω-categórica también lo son $T(b)$ y $T(c)$ y por ello $\dim_{\varphi(x,b)}(M_0/b) = \omega = \dim_{\varphi(x,c)}(M_0/c)$. Ponemos entonces $n_q = 0$. Si T no es ω-categórica tampoco lo es $T(bc)$. Si fuera $\dim_{\varphi(x,b)}(M_0/b) = \omega$ entonces M_0 sería en $T(bc)$ un modelo al tiempo primo y saturado, lo cual implica que $T(bc)$ es ω-categórica. Análogamente para $\dim_{\varphi(x,c)}(M_0/c)$. Como las dos dimensiones son finitas, hay $n_q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\dim_{\varphi(x,b)}(M_0/b) = \dim_{\varphi(x,c)}(M_0/c) + n_q.$$

Por el lema 18.6 tenemos que

$$\dim_{\varphi(x,b)}(M/b) = \dim_{\varphi(x,b)}(M/M_0) + \dim_{\varphi(x,b)}(M_0/b)$$

y

$$\dim_{\varphi(x,c)}(M/c) = \dim_{\varphi(x,c)}(M/M_0) + \dim_{\varphi(x,c)}(M_0/c)$$

y por la proposición 18.8

$$\dim_{\varphi(x,b)}(M/M_0) = \dim_{\varphi(x,c)}(M/M_0).$$

Reuniendo estos resultados vemos que $\dim_{\varphi(x,b)}(M/b) = \dim_{\varphi(x,c)}(M/c) + n_q$. Esta construcción es, claro está, independiente de la elección de la realización bc de q.

Proposición 18.10 *Sea T numerable y ω_1-categórica. Sea $\varphi(x, y) \in L$, y $a \in \mathfrak{C}$ tales que $\varphi(x, a)$ es fuertemente minimal. Si $a, b \in M$ y $a \equiv b$, entonces* $\dim_{\varphi(x,a)}(M/a) = \dim_{\varphi(x,b)}(M/b)$.

Prueba. Fácilmente podemos obtener una secuencia $(a_i : i < \omega)$ tal que $a_i a_{i+1} \equiv ab$. Sea $q = \mathrm{tp}(ab/\emptyset)$. Por el lema previo hay $n_q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\dim_{\varphi(x,a')}(M/a') = \dim_{\varphi(x,b')}(N/b') + n_q$$

siempre que $a'b' \models q$. Sea $N \supseteq \{a_i : i < \omega\}$ un modelo fuertemente ω-homogéneo y sea $p' \in S(N)$ una extensión de $p = \mathrm{tp}(a/\emptyset)$ con $\mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(p')$. Finalmente sea $a_\omega \models p'$. Veremos en primer lugar que en estas circunstancias $\{\mathrm{tp}(a_\omega a_i/\emptyset) : i < \omega\}$ debe ser finito. En caso contrario existiría un $I \subseteq \omega$ infinito tal que para cualesquiera $i, j \in I$ distintos

$a_\omega a_i \not\equiv a_\omega a_j$. Como N es fuertemente ω-homogéneo para cada $i < \omega$ existe un automorfismo f_i de N con $f_i(a_i) = a_0$. Sea $p'_i = (p')^{f_i}$. Si $i, j \in I$ son distintos existe $\psi(x, y) \in L$ tal que $\models \psi(a_\omega, a_i)$ pero $\models \neg\psi(a_\omega, a_j)$. Entonces $\psi(x, a_0) \in p'_i$ pero $\neg\psi(x, a_0) \in p'_j$. Esto muestra que $p'_i \neq p'_j$ siempre que $i, j \in I$ son distintos. Sin embargo $\mathrm{RM}(p'_i) = \mathrm{RM}(p)$ y hay sólo $\leq \mathrm{DM}(p)$ (un número finito) de extensiones de p sobre N con el mismo rango de Morley. Esta contradicción nos hace aceptar que $\{\mathrm{tp}(a_\omega a_i/\emptyset) : i < \omega\}$ es finito. Sea $m_i \in \mathbb{Z}$ el número que el lema previo asocia al tipo $\mathrm{tp}(a_\omega a_i/\emptyset)$. Resulta entonces que $m_{i+1} = m_i + n_q$ y por tanto que $m_{i+j} = m_i + j \cdot n_q$. Fijemos $i, j \in I$ distintos con $\mathrm{tp}(a_\omega a_i/\emptyset) = \mathrm{tp}(a_\omega a_j/\emptyset)$. Entonces $m_i = m_j$. De ello se sigue que si $i > j$, entonces $(i - j) \cdot n_q = 0$. Por tanto, $n_q = 0$.

Teorema 18.11 (Baldwin-Lachlan) *Si T es numerable y ω_1-categórica, entonces o bien $I(T, \omega) = 1$ o bien $I(T, \omega) = \omega$.*

Prueba. Supongamos que T no es ω-categórica y veamos que $I(T, \omega) = \omega$. Por la proposición 16.11 sabemos que hay $\varphi(x, y) \in L$ y $a \in \mathfrak{C}$ tales que $\varphi(x, a)$ es fuertemente minimal y $\mathrm{tp}(a/\emptyset)$ es aislado. También $T(a)$ es una teoría ω_1-categórica que no es ω-categórica. Por la proposición 18.3 $I(T(a), \omega) = \omega$. De ello ya se sigue inmediatamente que $I(T, \omega) \leq \omega$, aunque por otro lado esto lo sabíamos ya por la proposición 16.6. Sean $((M_i, a) : i < \omega)$ modelos numerables no isomorfos de $T(a)$. Mostraremos que $M_i \not\cong M_j$ si $i \neq j$. Supongamos lo contrario y sea f un isomorfismo entre M_i y M_j. Entonces $\varphi(x, f(a))$ es fuertemente minimal y $a \equiv f(a)$. Por la proposición 18.10, $\dim_{\varphi(x,a)}(M_j/a) = \dim_{\varphi(x,f(a))}(M_j/f(a))$ y entonces $\dim_{\varphi(x,a)}(M_i/a) = \dim_{\varphi(x,a)}(M_j/a)$, es decir, $\dim_{\varphi(x,a)}((M_i, a)) = \dim_{\varphi(x,a)}((M_j, a))$ en $T(a)$. Por la proposición 18.1 se concluye entonces que $(M_i, a) \cong (M_j, a)$.

Proposición 18.12 *Si T es numerable y ω_1-categórica, entonces todo modelo de T es homogéneo.*

Prueba. Si M es no numerable, M es saturado y por tanto homogéneo. Consideremos el caso de M numerable. Sean a, b tuplas de M tales que $a \equiv b$ y veamos que hay $f \in \mathrm{Aut}(M)$ tal que $f(a) = b$. Como $T(a)$ es ω_1-categórica, existe por la proposición 16.11 $\varphi(x, y, z) \in L$ y $a' \in M$ tales que $\varphi(x, a, a')$ es fuertemente minimal y $\mathrm{tp}(a'/a)$ es aislado. Entonces existe $b' \in M$ tal que $aa' \equiv bb'$. También la fórmula $\varphi(x, b, b')$ es fuertemente minimal. Sea X una base de $\varphi(M, a, a')$ (sobre aa') e Y una base de $\varphi(M, b, b')$ (sobre bb'). Por la proposición 18.10 tenemos que $|X| = |Y|$. Sea f una biyección entre X e Y. Utilizando la proposición 17.10 es fácil ver que la aplicación $f \cup \{(a, b), (a', b')\}$ es elemental. Como M es primo sobre $\varphi(M, a, a') \cup \{a, a'\}$, f puede extenderse a una inmersión elemental de M en M. Como M es minimal sobre $\varphi(M, b, b') \cup \{b, b'\}$, esta extensión es exhaustiva. Es por ello un automorfismo de M que transforma a en b.

Observación 18.13 *Sea T numerable y ω_1-categórica. Si M es κ-saturado y $M \prec N$, también N es κ-saturado.*

Proposición 18.14 *Sea T es numerable y ω_1-categórica. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) M es saturado.

(2) M es isomorfo a una subestructura elemental propia.

(3) M contiene una cadena elemental estricta infinita.

(4) M contiene un conjunto infinito de indiscernibles.

Prueba. Es claro que en cualquier teoría la condición *(1)* implica las restantes condiciones. Por otro lado si T es numerable y ω_1-categórica existe una fórmula $\varphi(x,y) \in L$ y $a \in \mathfrak{C}$ tales que $\varphi(x,a)$ es fuertemente minimal y $\mathrm{tp}(a/\emptyset)$ es aislado. Sea M un modelo que posee una subestructura elemental propia isomorfa N y sea f un isomorfismo entre N y M. Hay $b \in N$ con $a \equiv b$. Usando la proposición 18.10 vemos que $\dim_{\varphi(x,b)}(N/b) = \dim_{\varphi(x,f(b))}(M/f(b)) = \dim_{\varphi(x,b)}(M/b)$. Como por otro lado $\dim_{\varphi(x,b)}(M/N) \neq 0$ y $\dim_{\varphi(x,b)}(M/b) = \dim_{\varphi(x,b)}(M/N) + \dim_{\varphi(x,b)}(N/b)$, se concluye que $\dim_{\varphi(x,b)}(M/b)$ no es finita. De ello se sigue que M es saturado. Esto muestra *(2)* $\Rightarrow$ *(1)*. De modo análogo se muestra *(3)* $\Rightarrow$ *(1)*. Veamos finalmente cómo *(1)* se sigue de *(4)*. Sea X un subconjunto maximal indiscernible de M y sea Y un subconjunto propio de X tal que $X \sim Y$. Sea $N \prec M$ un modelo primo sobre X y sea f una biyección entre X e Y. Por indiscernibilidad f es elemental y por tanto puede extenderse a una inmersión elemental $f' : N \to N$. Por maximalidad de X, $f'(N) \cap (X \smallsetminus Y) = \emptyset$. Así pues $f'(N) \neq N$. En definitiva, N es isomorfo a una subestructura elemental propia. Por lo ya demostrado, N es saturado. De la observación previa se sigue que también M es saturado.

Capítulo 19

Apéndice: nociones de topología

Definición (Topología, espacio topológico, abiertos, cerrados) Una *topología* en un conjunto X es una colección σ de subconjuntos de X tal que

1. $\emptyset \in \sigma$ y $X \in \sigma$,
2. Si $A, B \in \sigma$, entonces $A \cap B \in \sigma$,
3. Si $\tau \subseteq \sigma$, entonces $\bigcup \tau \in \sigma$.

Los elementos de la topología σ se llaman *conjuntos abiertos* y se dice que el par (X, σ) es un *espacio topológico*. Se llaman *cerrados* los complementos de los conjuntos abiertos y se llaman *abierto–cerrados* los conjuntos que son al tiempo abiertos y cerrados.

Proposición 19.1 *Sea (X, σ) un espacio topológico.*

1. *$\emptyset$ y X son cerrados,*
2. *Si A, B son cerrados, $A \cup B$ es cerrado,*
3. *Si $\mathcal{F}$ es una colección no vacía de cerrados, $\bigcap \mathcal{F}$ es cerrado.*

Proposición 19.2 *Los conjuntos abierto–cerrados forman una subálgebra del álgebra de Boole $\mathcal{P}(X) = (P(X), \emptyset, X, \cap, \cup, \overline{})$.*

Definición (Base, espacio cero–dimensional) Una *base* de una topología σ en X es una colección $\mathcal{B}$ de abiertos tal que

$$\sigma = \{\bigcup \tau : \tau \subseteq \mathcal{B}\}.$$

Si $\mathcal{B}$ es base de una topología en X, esa topología está unívocamente determinada por $\mathcal{B}$. Una condición suficiente para que una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X sea base de una topología en X es que $X = \bigcup \mathcal{B}$ y que $\mathcal{B}$ esté cerrado bajo intersecciones finitas. Una vez fijada una base $\mathcal{B}$, los elementos de $\mathcal{B}$ se llaman *abiertos básicos*. Un espacio es *cero–dimensional* si posee una base de abierto–cerrados.

Definición (Espacio Hausdorff, recubrimiento, espacio compacto, pif) Un espacio topológico (X, σ) es *Hausdorff* si para cualesquiera puntos distintos $a, b \in X$ existen abiertos disjuntos O_a, O_b tales que $a \in O_a$ y $b \in O_b$. Un *recubrimiento* de un conjunto $A \subseteq X$ es una familia $\{A_i : i \in I\}$ de subconjuntos de X tales que $A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Se trata de un *recubrimiento abierto* si cada A_i es abierto. Un *subrecubrimiento* del recubrimiento es una subfamilia $\{A_i : i \in J\}$ (para algún $J \subseteq I$) que también recubre A. El conjunto A es *compacto* si todo recubrimiento abierto de A posee un subrecubrimiento finito. El espacio es *compacto* si X es un conjunto compacto. Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X tiene la *propiedad de la intersección finita* (abreviado, *pif*) si para cada $n \geq 1$ y cada $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, se tiene $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$.

Proposición 19.3 *El espacio topológico (X, σ) es compacto si y sólo si toda colección no vacía de cerrados con la pif tiene intersección no vacía.*

Prueba. $\{A_i : i \in I\}$ es un recubrimiento abierto del espacio si y sólo si $\{(X \smallsetminus A_i) : i \in I\}$ es una colección de cerrados con $\bigcap_{i \in I}(X \smallsetminus A_i) \neq \emptyset$.

Proposición 19.4 *Si A es un cerrado en un espacio compacto (X, σ), entonces A es compacto.*

Prueba. Si $\{O_i : i \in I\}$ es un recubrimiento abierto del cerrado A, entonces $\{X \smallsetminus A\} \cup \{O_i : i \in I\}$ es un recubrimiento abierto de X.

Definición (Espacio booleano) Un *espacio booleano* es un espacio topológico, Hausdorff, compacto y cero–dimensional.

Definición (Filtro, ultrafiltro, espacio de Stone) Sea $\mathbb{B} = (B, 0, 1, \wedge, \vee, ^{-})$ un álgebra de Boole. Un filtro en $\mathbb{B}$ es un subconjunto F de B tal que

1. $1 \in F$,
2. Si $a, b \in F$, entonces $a \wedge b \in F$,
3. Si $a \in F, b \in B$ y $a \leq b$, entonces $b \in F$.

donde $a \leq b \leftrightarrow a \vee b = b$. Un filtro F es *propio* si $0 \notin F$ y es un *ultrafiltro* si es propio y para cada $a \in B$ o bien $a \in F$ o bien $\overline{a} \in F$. El *espacio de Stone* de $\mathbb{B}$ es

$$St(\mathbb{B}) = \{U : U \text{ es un ultrafiltro en } \mathbb{B}\}.$$

Proposición 19.5 *Sea $\mathbb{B}$ un álgebra de Boole y para cada $a \in B$, sea $O_a = \{U \in St(\mathbb{B}) : a \in U\}$. Entonces $\{O_a : a \in B\}$ es una base para una topología en $St(\mathbb{B})$. El espacio topológico determinado es un espacio booleano.*

Prueba. Ver un manual de álgebras de Boole.

Definición (Espacios homeomorfos) Sean (X, σ) y (X', σ') espacios topológicos. Un *homeomorfismo* es una biyección $f : X \to Y$ tal que $\sigma' = \{f(O) : O \in \sigma\}$. Se dice que los espacios son *homeomorfos* si existe un homeomorfismo entre ellos.

Proposición 19.6 *Si* (X, σ) *es un espacio topológico booleano y* $\mathbb{B}$ *es su álgebra de abierto–cerrados, entonces* (X, σ) *es homeomorfo al espacio de Stone* $St(\mathbb{B})$ *de* $\mathbb{B}$.

Prueba. Ver un manual de álgebras de Boole.

Proposición 19.7 *Si* X *es un espacio booleano y* $\mathcal{B}$ *es una base de abierto–cerrados que está cerrada bajo uniones finitas, entonces todo abierto–cerrado está en* $\mathcal{B}$.

Prueba. Sea A un abierto–cerrado. Por ser abierto, existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$ es un recubrimiento abierto de A y A es cerrado. Por compacidad, existe un subconjunto finito $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ tal que $A = \bigcup \mathcal{F}_0$. Como $\mathcal{B}$ está cerrado bajo uniones finitas, $A \in \mathcal{B}$.

Definición (Interior y clausura) Sea (X, σ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. La *clausura* de A, $\mathrm{cl}(A)$, se define como la intersección de todos los cerrados que contienen a A y el *interior* de A, $\mathrm{int}(A)$ se define como la unión de todos los abiertos contenidos en A. Así $\mathrm{cl}(A)$ es el menor cerrado que contiene a A y $\mathrm{int}(A)$ es el mayor abierto contenido en A.

Observaciones 19.8 *En cualquier espacio topológico se verifica lo siguiente:*

(1) *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$ *y* $\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(B)$,

(2) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$ *y* $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A)$,

(3) $\mathrm{cl}(A) = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A)$ *y* $\mathrm{int}(A) = X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus A)$,

(4) $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$ *y* $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$,

(5) A *es cerrado si y sólo si* $\mathrm{cl}(A) = A$,

(6) A *es abierto si y sólo si* $\mathrm{int}(A) = A$.

Definición (Punto de acumulación y conjunto derivado) Sea (X, σ) un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $a \in X$. Se dice que a es un *punto de acumulación* de A si todo abierto al que pertenece a posee puntos de A distintos de a. El *conjunto derivado* de A, A' es el conjunto formado por los puntos de acumulación de A. Obsérvese que $A \cup A'$ es el conjunto formado por todos los puntos que tienen la propiedad de que todo abierto que los contiene tiene intersección no vacía con A.

Observaciones 19.9 *En cualquier espacio topológico se verifica lo siguiente:*

(1) *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $A' \subseteq B'$,

(2) $(A \cup B)' = A' \cup B'$,

(3) $A'' \subseteq A \cup A'$,

(4) $A \cup A'$ *es cerrado,*

(5) $A' \subseteq \mathrm{cl}(A)$.

Prueba. *(1)* es claro. $\supseteq$ de *(2)* se sigue de *(1)*. Respecto a $\subseteq$, si $a \notin A' \cup B'$ entonces existen abiertos O_A, O_B tales que $a \in O_A$, $O_A \cap A \subseteq \{a\}$, $a \in O_B$ y $O_B \cap B \subseteq \{a\}$. Entonces si $O = O_A \cap O_B$, resulta que O es un abierto, $a \in O$ y $O \cap (A \cup B) \subseteq \{a\}$, lo cual muestra que $a \notin (A \cup B)'$. Para mostrar *(3)*, supongamos que $a \in A''$ pero que $a \notin A$. Sea O un abierto tal que $a \in O$ y veamos que hay un punto $b \neq a$ tal que $b \in A \cap O$. Como $a \in A''$, hay un punto $c \neq a$ tal que $c \in A' \cap O$. Ahora, como $c \in A'$, existe $b \neq c$ tal que $b \in A \cap O$. Como $a \notin A$, deber ser $b \neq a$. Para mostrar *(4)*, sea $a \in X \setminus (A \cup A')$ y veamos que hay un abierto O tal que $a \in O \subseteq X \setminus (A \cup A')$. Por *(2)* y *(3)* tenemos que $(A \cup A') \cup (A \cup A')' \subseteq A \cup A'$, de modo que $a \notin (A \cup A') \cup (A \cup A')'$. Eso significa que existe un abierto O tal que $a \in O$ y $O \cap (A \cup A') = \emptyset$, con lo cual $O \subseteq X \setminus (A \cup A')$. Finalmente, *(5)* es claro dado que $X \setminus \mathrm{cl}(A)$ es un abierto disjunto con A.

Proposición 19.10 $\mathrm{cl}(A) = A \cup A'$.

Prueba. Por las observaciones previas.

Definición (Conjunto denso, conjunto denso en ninguna parte) Un subconjunto A de X es *denso* si $\mathrm{cl}(A) = X$ y es *denso en ninguna parte* si $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \emptyset$.

Proposición 19.11 *En cualquier espacio topológico se verifica lo siguiente:*

(1) A *es denso si y sólo si para cada abierto no vacío* $O, O \cap A \neq \emptyset$,

(2) A *es denso en ninguna parte si y sólo si* $\mathrm{cl}(A)$ *es denso en ninguna parte,*

(3) A *es un cerrado denso en ninguna parte si y sólo si* $X \setminus A$ *es un denso abierto,*

(4) A *es denso en ninguna parte si y sólo si* $X \setminus A$ *contiene un denso abierto.*

Prueba. *(1)* se sigue de la proposición 19.10. *(2)* es inmediato ya que $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = A$. Para *(3)*, supongamos que A es cerrado. Entonces, por *(1)*, A es denso en ninguna parte si y sólo si $\mathrm{int}(A) = \emptyset$ si y sólo si A no contiene ningún abierto no vacío si y sólo si $X \setminus A$ es denso. Por último, *(4)* se sigue de *(3)* y *(2)*.

Definición (Conjunto magro) Un conjunto *magro* es una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.

Observación 19.12 *Los conjuntos magros del espacio topológico* (X, σ) *forman un ideal del álgebra de Boole* $\mathcal{P}(X)$, *es decir, la unión finita de magros es magra y cualquier subconjunto de un conjunto magro es magro.*

Lema 19.13 *En cualquier espacio topológico las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) ningún abierto no vacío es magro,

(2) si $\{D_n : n \in \omega\}$ es una colección de densos abiertos, entonces $\bigcap_{n\in\omega} D_n$ es denso.

Prueba. *(1) ⇒ (2).* Sea $\{D_n : n \in \omega\}$ una colección de densos abiertos, sea O un abierto no vacío y veamos que $O \cap \bigcap_{n\in\omega} D_n \neq \emptyset$. Cada $X \setminus D_n$ es un cerrado denso en ninguna parte y por tanto $X \setminus \bigcap_{n\in\omega} D_n = \bigcup_{n\in\omega}(X \setminus D_n)$ es magro. Como O no puede ser magro, O no puede estar contenido en $X \setminus \bigcap_{n\in\omega} D_n$, es decir, $O \cap \bigcap_{n\in\omega} D_n \neq \emptyset$.
(2) ⇒ (1). Sea O un abierto magro, digamos $O = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ donde cada A_n es denso en ninguna parte. Pongamos $D_n = X \setminus \mathrm{cl}(A_n)$. Entonces cada D_n es denso abierto, de modo que si O es no vacío, $O \cap \bigcap_{n\in\omega} D_n \neq \emptyset$, lo que contradice a $O = \bigcup_{n\in\omega} A_n$.

Teorema 19.14 (Teorema de Categoría de Baire) *En un espacio booleano ningún abierto no vacío es magro.*

Prueba. Usando el lema 19.13, basta mostrar que si $\{D_n : n \in \omega\}$ es una colección de densos abiertos, y O es un abierto no vacío entonces $O \cap \bigcap_{n\in\omega} D_n \neq \emptyset$. Para ver esto mostramos primero que hay una colección $\{A_n : n \in \omega\}$ de abierto–cerrados no vacíos tales que $A_{n+1} \subseteq A_n \subseteq O \cap D_n$. Comenzamos observando que $O \cap D_0$ es un abierto no vacío y contiene por tanto un abierto–cerrado no vacío A_0. Supuesto obtenido ya $A_n \subseteq O \cap D_n$, vemos que, al ser D_{n+1} denso, $A_n \cap D_{n+1}$ es un abierto no vacío y contiene por tanto un abierto–cerrado no vacío A_{n+1}. Construida la secuencia de este modo, observamos que $\{A_n : n \in \omega\}$ es una colección de cerrados con la pif y por compacidad $\bigcap_{n\in\omega} A_n \neq \emptyset$. Como $\bigcap_{n\in\omega} A_n \subseteq O \cap \bigcap_{n\in\omega} D_n$, tenemos el resultado buscado.

Definición (Funciones continuas y funciones abiertas) Sean (X, σ) y (Y, τ) espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es *continua* si para cada abierto $O \subseteq Y$, $f^{-1}(O)$ es un abierto. Y f es una *función abierta* si para cada abierto $O \subseteq X$, $f(O)$ es abierto. Obsérvese que en ambos casos basta con que O sea un abierto básico.

Lema 19.15 *Si $f : X \to Y$ es continua y abierta y $A \subseteq Y$ es denso en ninguna parte, entonces $f^{-1}(A)$ es también denso en ninguna parte.*

Prueba. Del hecho de que f es continua se sigue que $\mathrm{cl}(f^{-1}(A)) \subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(A))$, pues $f^{-1}(\mathrm{cl}(A))$ es un cerrado que contiene a $f^{-1}(A)$. Entonces, como f es abierta, si $O \subseteq \mathrm{cl}(f^{-1}(A))$ es un abierto no vacío tenemos que también $f(O) \subseteq \mathrm{cl}(A)$ es un abierto no vacío.

Definición (Derivada de Cantor-Bendixson) Sea (X, σ) un espacio topológico arbitrario. Observemos que $A \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $A' \subseteq A$. Si A es un cerrado se tiene entonces que $A'' \subseteq A'$ y por tanto también A' es cerrado. Así en la siguiente definición todos los conjuntos que se obtienen son cerrados.

- $X^{(0)} = X$
- $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$

- $X^{\alpha} = \bigcap_{i<\alpha} X^{(i)}$ si α es un ordinal límite.
- $X^{(\infty)} = \bigcap_{\alpha} X^{(\alpha)}$

$X^{(\alpha)}$ es la *α-derivada de Cantor-Bendixson del espacio X*. Obviamente

$$X = X^{(0)} \supseteq X^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq X^{(\alpha)} \supseteq X^{(\alpha+1)} \supseteq \cdots \supseteq X^{(\infty)}$$

Lema 19.16 *Sea (X, σ) un espacio compacto.*

(1) Si α es límite y para cada $i < \alpha$, $X^{(i)} \neq \emptyset$, entonces $X^{(\alpha)} \neq \emptyset$.

(2) Si α es el mayor ordinal con $X^{(\alpha)} \neq \emptyset$, entonces $X^{(\alpha)}$ es finito.

Prueba. *(1)* se sigue del hecho de que la colección $\{X^{(i)} : i < \alpha\}$ tiene la pif. *(2)* se obtiene observando que si A es compacto y $A' = \emptyset$, entonces A es finito.

Definición (Espacio disperso, rango y grado de Cantor-Bendixson) Sea (X, σ) un espacio compacto. El *rango de Cantor-Bendixson de $a \in X$* es $\mathrm{CBR}_X(a) = \infty$ si $a \in X^{(\infty)}$. Y si $a \notin X^{(\infty)}$, existe un mayor α con $a \in X^{(\alpha)}$ y se define $\mathrm{CBR}_X(a) = \alpha$. Definimos ahora el *rango y grado de Cantor-Bendixson de un cerrado $A \subseteq X$*. Si $A = \emptyset$ su rango es $\mathrm{CBR}_X(A) = -1$ y su grado es $\mathrm{CBD}_X(A) = 0$. Si hay $a \in A$ con $\mathrm{CBR}_X(a) = \infty$ se pone $\mathrm{CBR}_X(A) = \infty$ y $\mathrm{CBD}_X(A) = \infty$. En otro caso hay en A elementos de rango máximo. Sea α este rango. Ponemos $\mathrm{CBR}_X(A) = \alpha$. Resulta que hay en A un número finito de elementos de rango α. Si n es su número se pone $\mathrm{CBD}_X(A) = n$. Se dice que el espacio es *disperso* si $X^{(\infty)} = \emptyset$, es decir, si para cada $a \in X$, $\mathrm{CBR}_X(a) < \infty$. En la notación CBR_X y CBD_X omitiremos el subíndice X cuando el contexto lo permita.

Proposición 19.17 *Sea (X, σ) un espacio booleano y $A \subseteq X$ un cerrado. Hay entonces un abierto-cerrado $U \supseteq A$ con $\mathrm{CBR}(A) = \mathrm{CBR}(U)$ y $\mathrm{CBD}(A) = \mathrm{CBD}(U)$.*

Prueba. Se pone $U = \emptyset$ si $A = \emptyset$ y $U = X$ si $\mathrm{CBR}(A) = \infty$. Sea $\alpha = \mathrm{CBR}(A)$. Podemos suponer que $0 \leq \alpha < \infty$. Entonces $A \cap X^{(\alpha+1)} = \emptyset$. Para cada $a \in A$ hay por tanto un abierto-cerrado U_a tal que $a \in U_a$ y $U_a \cap X^{(\alpha+1)} = \emptyset$. Por compacidad, hay un abierto-cerrado U tal que $A \subseteq U$ y $U \cap X^{(\alpha+1)} = \emptyset$. Obviamente, $\mathrm{CBR}(A) = \mathrm{CBR}(U)$. Hay sólo un número finito de $a \in U \smallsetminus A$ con $\mathrm{CBR}(a) = \alpha$. Para cada tal $a \in U \smallsetminus A$ podemos obtener un abierto-cerrado V_a tal que $a \in V_a$ y $V_a \subseteq U \smallsetminus A$. Si V es la unión de estos abierto-cerrados, V mismo y $U \smallsetminus V$ son abierto-cerrados y $A \subseteq U \smallsetminus V$. Es claro que $\mathrm{CBR}(A) = \mathrm{CBR}(U \smallsetminus V)$ y $\mathrm{CBD}(A) = \mathrm{CBD}(U \smallsetminus V)$.

Proposición 19.18 *Sea (X, σ) un espacio booleano y $U \subseteq X$ un abierto-cerrado.*

(1) $\mathrm{CBR}(U) \geq 0$ *si y sólo si* $U \neq \emptyset$

(2) $\mathrm{CBR}(U) \geq \alpha + 1$ *si y sólo si hay una familia $(U_n : n < \omega)$ de subconjuntos abierto-cerrados de U, disjuntos entre sí y con* $\mathrm{CBR}(U_n) \geq \alpha$

(3) Si α es límite, entonces $\mathrm{CBR}(U) \geq \alpha$ *si y sólo si* $\mathrm{CBR}(U) \geq i$ *para cada $i < \alpha$*

(4) Si $\mathrm{CBR}(U) = \alpha < \infty$*, entonces* $\mathrm{CBD}(U)$ *es el mayor número* $n < \omega$ *para el que existen* $U_1, \ldots, U_n$ *subconjuntos abierto-cerrados de* U*, disjuntos entre sí y con* $\mathrm{CBR}(U_i) = \alpha$*.*

Prueba. *(1)* y *(3)* son claros. *(2)* $\Rightarrow$. Tómese $a \in U$ con $\mathrm{CBR}(a) \geq \alpha+1$. Hay $b_0 \in U \setminus \{a\}$ con $\mathrm{CBR}(b_0) \geq \alpha$. Obtenemos a continuación abierto-cerrados U_0, V_0, tales que $U = U_0 \dot\cup V_0$, $b_0 \in U_0$ y $a \in V_0$. De nuevo, hay $b_1 \in V_0 \setminus \{a\}$ con $\mathrm{CBR}(b_1) \geq \alpha$. Hay entonces abierto-cerrados U_1, V_1 con $V_0 = U_1 \dot\cup V_1$, $b_1 \in U_1$ y $a \in V_1$. Así se obtienen $U_0, U_1, U_2, \ldots$. *(2)* $\Leftarrow$. Tómese $a_n \in U_n$ con $\mathrm{CBR}(a_n) \geq \alpha$. Así, $a_n \in U \cap X^{(\alpha)}$. Como $U \cap X^{(\alpha)}$ es un cerrado infinito, posee un punto de acumulación, que pertenece entonces a U y a $X^{(\alpha+1)}$. Con ello, $\mathrm{CBR}(U) \geq \alpha+1$. *(4)* Sea $\mathrm{CBR}(U) = \alpha$ y $\mathrm{CBD}(U) = n$. Hay entonces exactamente n puntos en U con rango α y ninguno de rango superior. Sean $a_1, \ldots, a_n$ estos puntos. Obtenemos abierto-cerrados $U_1, \ldots, U_n$ que los separan: son disjuntos y $a_i \in U_i$. Obviamente no puede haber $n+1$ de ellos.

Proposición 19.19 *Sea* (X, σ) *un espacio booleano y* $a \in X$*. Entonces*

$$\mathrm{CBR}(a) = \min\{\mathrm{CBR}(U) : U \text{ abierto-cerrado y } a \in U\}$$

Prueba. Si $a \in U$ entonces $\mathrm{CBR}(U) \geq \mathrm{CBR}(a)$. Por tanto $\mathrm{CBR}(a) \leq \min\{\mathrm{CBR}(U) : U \text{ abierto-cerrado y } a \in U\}$. Para establecer la otra desigualdad observemos que $\{a\}$ es cerrado y que $\mathrm{CBR}(\{a\}) = \mathrm{CBR}(a)$. Por la proposición 19.17 hay un abierto cerrado U tal que $\{a\} \subseteq U$ y $\mathrm{CBR}(U) = \mathrm{CBR}(\{a\})$. Obviamente $a \in U$ y $\mathrm{CBR}(a) = \mathrm{CBR}(U)$.

Proposición 19.20 *Sea* (X, σ) *un espacio booleano y* $U \subseteq X$ *un abierto-cerrado. Entonces* $\mathrm{CBR}(U) < \infty$ *si y sólo si no hay ningún árbol binario* $(U_s : s \in {}^{<\omega}2)$ *formado por abierto-cerrados no vacíos* $U_s \subseteq U$ *tales que* $U_s = U_{s^\frown 0} \dot\cup U_{s^\frown 1}$*.*

Prueba. $\Rightarrow$ Sea $\mathrm{CBR}(U) = \alpha < \infty$. Tómese U_s de rango mínimo y de grado mínimo en su rango. Como el rango es $< \infty$, aparece una contradicción al observar que $U_s = U_{s^\frown 0} \dot\cup U_{s^\frown 1}$, pues el rango de $U_{s^\frown 0}$ y $U_{s^\frown 1}$ es el mismo que el de U_s, y el grado de U_s es la suma de los grados de $U_{s^\frown 0}$ y $U_{s^\frown 1}$. $\Leftarrow$ Como X es un conjunto, hay α con $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$. Entonces $\mathrm{CBR}(V) = \infty \Leftrightarrow \mathrm{CBR}(V) \geq \alpha$. Sea $\mathrm{CBR}(U) = \infty$. Comenzamos con $U_\emptyset = U$. Supuesto obtenido U_s con $\mathrm{CBR}(U_s) = \infty$, observamos que, como $\mathrm{CBR}(U_s) \geq \alpha + 1$, podemos partir U_s en abierto-cerrados $U_{s^\frown 0}, U_{s^\frown 1}$ de rango $\geq \alpha$. Entonces $\mathrm{CBR}(U_{s^\frown 0}) = \mathrm{CBR}(U_{s^\frown 1}) = \infty$.

Proposición 19.21 *En todo espacio booleano disperso el conjunto de los puntos aislados es denso.*

Prueba. Sea (X, σ) un espacio booleano y supongamos que el conjunto de los puntos aislados no es denso. Hay entonces un abierto no vacío O que no tiene puntos aislados. Si A es cerrado y $O \subseteq A$, entonces también $O \subseteq A'$. Una inducción muestra entonces que $O \subseteq X^{(\alpha)}$ para cada α y por tanto que $O \subseteq X^{(\infty)}$. En consecuencia X no es disperso.

Bibliografía

[1] BALDWIN, J. T. *Fundamentals of stability theory.* Springer-Verlag. Berlin 1988.

[2] BALDWIN, J. T. y LACHLAN , A. H. On strongly minimal sets. *The Journal of Symbolic Logic 36* (1971), 79-96.

[3] BARWISE, J. Back and forth through infinitary logic. En *Studies in Model Theory,* M. Morley, Ed. Mathematical Association of America, 1973, pp. 5-34.

[4] BARWISE, J., Ed. *Handbook of mathematical logic.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 90. North Holland P.C. Amsterdam, 1977.

[5] BUECHLER, S. *Essential stability theory.* Springer-Verlag. Berlin, 1996.

[6] CHANG, C. C. y KEISLER, H. J. *Model theory,* tercera ed. North Holland P.C. Amsterdam, 1990.

[7] EBBINGHAUS, H. D., FLUM, J. y THOMAS, W. *Einführung in die mathematische Logik,* tercera ed. revisada y ampliada. BI-Wissenschaftsverlag. Mannheim, 1992.

[8] HENSON, C.W. *Model Theory.* Class Notes for Mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign. 1988.

[9] HODGES, W. *Model theory.* Cambridge University Press. Cambridge, 1993.

[10] HODGES, W. *A shorter model theory.* Cambridge University Press. Cambridge, 1997.

[11] LASCAR, D. *Stability in model theory.*, Longman Scientific & Technical. Harlow, U.K. 1987.

[12] MACINTYRE, A. Model completeness. En *Handbook of mathematical logic,* J. Barwise, Ed. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 90. North Holland P.C. Amsterdam, 1977, pp.139-180.

[13] MAKKAI, M. A survey of basic stability theory with particular emphasis on orthogonality and regular types. *Israel Journal of Mathematics 49* (1984), pp. 181-238.

[14] MARKER. D., MESSMER, M. y PILLAY, A., Ed. *Model theory of fields.* Lecture Notes in Logic 5. Springer. Berlin, 1996.

[15] MARKER, D. Introduction to the model theory of fields. En *Model theory of fields,* M. Marker, M. Messmer y A. Pillay Ed. Lecture Notes in Logic 5, Springer, 1996, pp. 1-37.

[16] MARKER, D. Model theory: an introduction. Springer, New York 2002.

[17] MORLEY, M. The number of countable models. *The Journal of Symbolic Logic 35* (1970), pp. 14-18.

[18] MORLEY, M. Categoricity in power. *Transactions of the American Mathematical Society 114* (1965), 514-538.

[19] MORLEY, M. Countable models of $\aleph_1$-categorical theories. *Israel Journal of Mathematics 5* (1967), 65-72.

[20] MORLEY, M., Ed. *Studies in model theory.* Studies in Mathematics 8. Mathematical Association of America, 1973.

[21] POIZAT, B. *Cours de théorie des modèles.* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah. 82, rue Racine 69100 Villeurbanne, France, 1985. Diffusé par OFFILIB.

[22] PILLAY, A. *An introduction to stability theory.* Oxford University Press, 1983.

[23] PRESTEL, A. *Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie.* Vieweg Studium, 1986.

[24] ROBINSON, A. Model theory as a framework for algebra. En *Studies in model theory,* M. Morley, Ed. Mathematical Association of America, 1973, pp. 134-157.

[25] ROTHMALER, P. *Introduction to model theory*. 1999. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam 2000.

[26] SACKS, G. E. *Saturated model theory.* W. A. Benjamin, Inc. Reading, Massachusetts, 1972.

[27] SHELAH, S. *Classification theory,* segunda ed. North Holland P.C. Amsterdam, 1990.

[28] VAUGHT, R.L. Denumerable models of complete theories. En *Infinitistic Methods. Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics. Warsaw 1959* (1961), Pergamon Press, pp. 303-321.

[29] ZIEGLER, M. *Stabilitätstheorie, Freiburger Vorlesung gehalten im Wintersemester 1988/1989. Ausgearbeit von Urs Künzi.*, 1991

[30] ZIEGLER, M. *Modelltheorie II, Freiburger Vorlesung gehalten im Sommersemester 1996.* 1996.

[31] ZIEGLER, M. *Vorlesung über Modelltheorie, Freiburger Vorlesung gehalten im Wintersemester 1997/1998* 1997.