Teorías monobasadas*

Enrique Casanovas
Universidad de Barcelona

23 de octubre de 2005

T es una teoría completa con modelos infinitos y $\mathfrak{C}$ es su modelo monstruo. L es su lenguaje. Suponemos adicionalmente (excepto en la sección del rango local R_φ) que T **es estable**. Si no se dice lo contrario A, B, C son subconjuntos de $\mathfrak{C}$ y a, b, c son secuencias de elementos de $\mathfrak{C}$. Usamos $\overline{A}$ como notación alternativa para $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$. Todo tipo $\mathfrak{p}(x) \in S(\mathfrak{C})$ es definible. Si $\varphi = \varphi(x, y) \in L$ y $\mathfrak{p}$ es definible sobre A, usamos a veces la notación $d_\mathfrak{p} x \varphi(x, y)$ para referirnos a una fórmula $\psi(y) \in L(A)$ que define $\{a : \varphi(x, a) \in \mathfrak{p}\}$. Otra notación que utilizamos a veces es $\varphi^{-1}(y, x)$ para referirnos a $\varphi(x, y)$ pero intercambiando los papeles de las variables x, y.

1. Bases canónicas

Definición 1.1 *Se dice que un subconjunto B de $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ es una* base canónica *del tipo global $\mathfrak{p} \in S(\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}})$ si para cada automorfismo $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$, $\mathfrak{p}^f = \mathfrak{p}$ si y sólo si f es la identidad en B.*

Observaciones 1.2 *1. Si B y B' son bases canónicas de $\mathfrak{p}$, entonces $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(B) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(B')$.*

2. Todo tipo global tiene una base canónica.

Prueba: El punto *1.* es claro. Para *2.*, escojamos para cada $\varphi(x, y) \in L$ una fórmula $\psi(y)$ que define a $\mathfrak{p}(x) \upharpoonright \varphi(x, y)$ y sea $c_\varphi \in \mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ el parámetro canónico de $\psi(y)$. Entonces $(c_\varphi : \varphi \in L)$ es una base canónica de $\mathfrak{p}$. □

Definición 1.3 *Sea $p(x) \in S(A)$ un tipo estacionario. Decimos que B es una* base canónica *de p si es una base canónica de la extensión global no bifurcante de p. Usamos la notación $\mathrm{Cb}(a/A)$ para referirnos a $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(B)$ donde B es una base canónica arbitraria de $\mathrm{stp}(a/A)$, el tipo fuerte de la tupla a sobre A.*

Observación 1.4 *B es una base canónica del tipo estacionario $p \in S(A)$ si y sólo si para cada automorfismo $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$, p es paralelo a p^f si y sólo si $f \upharpoonright B$ es la identidad.*

Observaciones 1.5 *1.* $\mathrm{Cb}(a/A) \subseteq \overline{A}$.

*Notas que exponen los resultados discutidos con Rafel Farré en la primavera, el verano y el inicio del otoño de 2005 en el Seminario de Teoría de Modelos. A Rafel se deben muchas observaciones que mejoran las demostraciones. Más esporádicamente han intervenido también Juan Francisco Pons y Rodrigo Peláez. No se exponen nuevos teoremas sino reelaboración de cosas sabidas.

2. *Si* $(a_i : i < \omega)$ *es una secuencia de Morley de* $\mathrm{stp}(a/A)$*, entonces* $\mathrm{Cb}(a/A) \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a_i : i < \omega)$.

Prueba: *1.* Si un automorfismo f es la identidad en $\overline{A}$, entonces fija $\mathrm{stp}(a/A)$ y por tanto también su extensión global no bifurcante. *2.* Sea $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/(a_i : i < \omega))$ y sea $\mathfrak{p}$ la extensión global no bifurcante de $\mathrm{stp}(a/A)$. Entonces $\mathfrak{p}$ es el tipo promedio

$$\mathrm{Av}(a_i : i < \omega) = \{\varphi(x) \in L(\mathfrak{C}) : \models \varphi(a_i) \text{ para casi todo } i < \omega\}$$

de la secuencia $(a_i : i < \omega)$, con lo cual f fija $\mathfrak{p}$. $\square$

Proposición 1.6 *Sea* $\mathfrak{p}(x)$ *un tipo global y sea* B *una base canónica suya. Entonces* $\mathfrak{p}$ *no bifurca sobre* A *si y sólo si* $B \subseteq \overline{A}$*. Además las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathfrak{p}$ *es definible sobre* A.
2. $B \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$.
3. $\mathfrak{p}$ *no bifurca sobre* A *y* $\mathfrak{p} \upharpoonright A$ *es estacionario.*

Prueba: Si $\mathfrak{p}$ no bifurca sobre A entonces tiene la misma base canónica que su restricción a $\overline{A}$ y ésta está contenida en $\overline{A}$. Por otro lado es claro que $\mathfrak{p}$ es definible sobre B pues para cada $\varphi(x,y) \in L$, $\{a : \varphi(x,a) \in \mathfrak{p}\}$ es definible con parámetros y B-invariante. Y si $\mathfrak{p}$ es definible sobre A, entonces su órbita en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ tiene a $\mathfrak{p}$ como único elemento de manera que $\mathfrak{p}$ no bifurca sobre A (por tener órbita acotada) y su restricción a A es estacionaria (pues las extensiones globales no bifurcantes están en la misma órbita). Y viceversa, si $\mathfrak{p}$ no bifurca sobre A y su restricción a A es estacionaria, la órbita de $\mathfrak{p}$ en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ tiene a $\mathfrak{p}$ como único elemento de manera que (por definición de base canónica) $B \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$. $\square$

Proposición 1.7 *Sea* $B \subseteq A$*. Entonces son equivalentes:*

1. $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_B A$
2. $\mathrm{Cb}(a/A) \subseteq \overline{B}$
3. $\mathrm{Cb}(a/A) = \mathrm{Cb}(a/B)$.

Prueba: La equivalencia entre *1.* y *2.* se sigue de la proposición previa. Respecto a *3.* obsérvese que si $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_B A$ entonces $\mathrm{stp}(a/A)$ y $\mathrm{stp}(a/B)$ tienen la misma extensión global no bifurcante y por ello $\mathrm{Cb}(a/A) = \mathrm{Cb}(a/B)$. Por otro lado, si las bases canónicas coinciden entonces $\mathrm{Cb}(a/A) = \mathrm{Cb}(a/B) \subseteq \overline{B}$. $\square$

Proposición 1.8 *Si* T *es superestable, para cada* a *y* A *hay un conjunto finito* $A_0 \subseteq \overline{A}$ *tal que* $\mathrm{Cb}(a/A) \subseteq \overline{A_0}$*. Si* T *es totalmente trascendente puede obtenerse adicionalmente* $\mathrm{Cb}(a/A) \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A_0)$.

Lema 1.9 *Si* $a \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(b)$*, entonces* $\mathrm{Cb}(a/A) \subseteq \mathrm{Cb}(b/A)$.

Prueba: Sea f un automorfismo que fija todos los puntos de $\mathrm{Cb}(b/A)$. Mostraremos que $\mathrm{stp}(a/A)$ y $\mathrm{stp}(f(a)/f(A))$ son paralelos, de lo cual se sigue inmediatamente que f fija todos los puntos de $\mathrm{Cb}(a/A)$. Como $\mathrm{stp}(b/A)$ y $\mathrm{stp}(f(b)/f(A))$ son paralelos, hay $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A f(A)$ tal que $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{f(A)} A$, $c \equiv_{\overline{A}} b$ y $c \equiv_{f(\overline{A})} f(b)$. Sea h una función definible sin parámetros y tal que $h(b) = a$. Entonces $h(c) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A f(A)$, $h(c) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{f(A)} A$, $h(c) \equiv_{\overline{A}} a$ y $h(c) \equiv_{f(\overline{A})} f(a)$, de modo que, en efecto, $\mathrm{stp}(a/A)$ y $\mathrm{stp}(f(a)/f(A))$ son paralelos. $\square$

2. El rango local R_φ

Dejamos en suspenso la hipótesis de la estabilidad de T en toda esta sección.

Definición 2.1 *Sea $\varphi = \varphi(x, y) \in L$. Un φ-tipo sobre A es un conjunto $p(x)$ consistente formado por fórmulas de la forma $\varphi(x, a)$ con $a \in A$ y negaciones de éstas. Es completo si para cada $a \in A$, $\varphi(x, a) \in p$ o bien $\neg\varphi(x, a) \in p$. Obsérvese que cada φ-tipo completo determina un tipo completo en el contexto más amplio de las fórmulas que son combinaciones booleanas de φ-fórmulas. El conjunto $S_\varphi(A)$ formado por los φ-tipos completos sobre A es un espacio topológico compacto, Hausdorff y cero-dimensional con la base de abierto-cerrados dada por los conjuntos*

$$[\psi] = \{p \in S_\varphi(A) : p \vdash \psi\}$$

para cada combinación booleana ψ de φ-fórmulas sobre A. La restricción

$$p(x) \mapsto p(x) \restriction \varphi = \{\psi \in p : \psi \text{ es una } \varphi\text{-fórmula sobre } A\}$$

es una aplicación continua exhaustiva del espacio $S_n(A)$ (si n es la longitud de la tupla x) en el espacio $S_\varphi(A)$. Por tanto es una aplicación cerrada.

Definición 2.2 *Sea $\pi(x)$ un tipo parcial sobre un conjunto A. El conjunto $\{\mathfrak{p}(x) \in S_n(\mathfrak{C}) : \mathfrak{p}(x) \vdash \pi(x)\}$ es un cerrado en $S_n(\mathfrak{C})$ y tiene por tanto una imagen cerrada en $S_\varphi(\mathfrak{C})$ en la restricción $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \restriction \varphi$. Esta imagen es el conjunto cerrado*

$$X_{\pi,\varphi} = \{\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C}) : \mathfrak{p} \text{ es consistente con } \pi\}.$$

*Este espacio puede caracterizarse también como $\{\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C}) : \mathfrak{p} \vdash \pi'\}$ siendo $\pi' = \pi'(x)$ el φ-tipo formado por todas las disyunciones de φ-fórmulas (con parámetros en $\mathfrak{C}$) que son consecuencia de π. Una complicación de esta caracterización es que π' es un tipo parcial sobre una clase propia de parámetros. El φ-*rango *de π, $R_\varphi(\pi)$, es el rango de Cantor-Bendixson del subespacio $X_{\pi,\varphi}$ de $S_\varphi(\mathfrak{C})$, es decir el rango de $X_{\pi,\varphi}$ calculado en $X_{\pi,\varphi}$ y no calculado en $S_\varphi(\mathfrak{C})$. La φ-*multiplicidad *de π, $Mlt_\varphi(\pi)$, es el grado de Cantor-Bendixson de este subespacio.*

Observación 2.3 *Sea X un espacio topológico booleano (Hausdorff, compacto y cero dimensional) y sea Y un cerrado en X. El rango de Cantor-Bendixson de Y puede definirse de dos modos distintos: como $CBR_X(Y)$, el rango del cerrado Y en el espacio X, y como $CBR_Y Y$, el rango del subespacio Y en Y. En el primer caso es el máximo rango (calculado en X) de los elementos de Y. Un conjunto finito de puntos puede tener rango muy alto en este primer sentido pero tendrá rango cero en el segundo sentido. Aquí se ha usado la segunda versión para definir el rango local $R_\varphi(\pi)$. En general, $CBR_Y(Y) \leq CBR_X(Y)$ y cuando Y es un abierto-cerrado estos dos rangos coinciden. Cuando π está formado por un número finito de combinaciones booleanas de φ-fórmulas, el cerrado $X_{\pi,\varphi}$ es un abierto-cerrado y el rango $R_\varphi(\pi)$ es también el rango de este cerrado calculado en $S_\varphi(\mathfrak{C})$, es decir, el máximo de los rangos (en $S_\varphi(\mathfrak{C})$) de los tipos $\mathfrak{p}$ tales que $\mathfrak{p} \vdash \pi$. Veremos luego que esto se generaliza a φ-tipos parciales infinitos π.*

Lema 2.4 *Si $\pi_1(x) \vdash \pi_2(x)$, entonces $R_\varphi(\pi_1) \leq R_\varphi(\pi_2)$ y en caso $R_\varphi(\pi_1) = R_\varphi(\pi_2)$, entonces $Mlt_\varphi(\pi_1) \leq Mlt_\varphi(\pi_2)$.*

Prueba: *1.* Sea $X_1 = \{\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C}) : \mathfrak{p} \text{ es consistente con } \pi_1\}$ y sea $X_2 = \{\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C}) : \mathfrak{p} \text{ es consistente con } \pi_2\}$. Un punto de rango α en el espacio X_1 tiene rango $\geq \alpha$ en el espacio X_2. $\square$

Proposición 2.5 *1. $R_\varphi(\pi)$, puede caracterizarse con las siguientes reglas:*

a) *$R_\varphi(\pi) \geq 0$ si y sólo si π es consistente.*

b) *$R_\varphi(\pi) \geq \alpha + 1$ si y sólo si para cada $n < \omega$ existe una secuencia $(\psi_i(x) : i < n)$ de conjunciones ψ_i de φ-fórmulas tales que $R_\varphi(\pi \cup \{\psi_i\}) \geq \alpha$ y siempre que $i < j < n$, $\models \neg\exists x(\psi_i(x) \wedge \psi_j(x))$*

c) *$R_\varphi(\pi) \geq \alpha$ si y sólo si $R_\varphi(\pi) \geq \beta$ para cada $\beta < \alpha$ si α es límite.*

2. Si $R_\varphi(\pi) = \alpha < \infty$ entonces $Mlt_\varphi(\pi)$ es el mayor número natural n para el que hay una secuencia $(\psi_i(x) : i < n)$ de conjunciones ψ_i de φ-fórmulas tales que $R_\varphi(\pi \cup \{\psi_i\}) \geq \alpha$ y siempre que $i < j < n$, $\models \neg\exists x(\psi_i(x) \wedge \psi_j(x))$

Prueba: El rango de Cantor-Bendixson de un espacio es ≥ 0 si y sólo si el espacio es no vacío y es mayor o igual que un ordinal límite α si y sólo si es mayor que β para cada $\beta < \alpha$. Respecto a b), supongamos que $R_\varphi(\pi) \geq \alpha + 1$ y sea $n < \omega$. En el espacio $X_{\pi,\varphi} = \{\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C}) : \mathfrak{p} \text{ es consistente con } \pi\}$ hay infinitos puntos de rango $\geq \alpha$. Sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ unos cuantos de estos. Es claro que podemos encontrar conjunciones $\psi_1, \ldots, \psi_n$ de φ-fórmulas tales que $\mathfrak{p}_i \vdash \psi_i$ y para $i \neq j$, $\models \neg\exists x(\psi_i(x) \wedge \psi_j(x))$. Sea $X_i = \{\mathfrak{p} \in X_{\pi,\varphi} : \mathfrak{p} \vdash \psi_i\}$. Es un subespacio de $X_{\pi,\varphi}$ determinado por un abierto-cerrado, de modo que (véase observación 2.3) su rango como cerrado en $X_{\pi,\varphi}$ coincide con su rango como subespacio. Como $\mathfrak{p}_i \in X_i$ este rango es $\geq \alpha$. Por tanto, $R_\varphi(\pi \cup \{\psi_i\}) \geq \alpha$. A la inversa, queremos ahora ver que $R_\varphi(\pi) \geq \alpha+1$, es decir que el espacio $X_{\pi,\varphi}$ contiene infinitos puntos de rango $\geq \alpha$. Sea $n < \omega$ y veamos que tiene a menos n puntos con ese rango. Por hipótesis tenemos fórmulas $\psi_1, \ldots, \psi_n$ que son conjunciones de φ-fórmulas, cumplen $R_\varphi(\pi \cup \{\psi_i\}) \geq \alpha$ y $\models \neg\exists x(\psi_i(x) \wedge \psi_j(x))$ para $i \neq j$. Entonces $X_i = \{\mathfrak{p} \in X_{\pi,\varphi} : \mathfrak{p} \vdash \psi_i\}$ tiene rango de Cantor-Bendixson $\geq \alpha$ en X_i y por la observación 2.3, tiene también rango $\geq \alpha$ en $X_{\pi,\varphi}$. Si escogemos entonces $\mathfrak{p}_i \in X_i$ con rango $\geq \alpha$ en $X_{\pi,\varphi}$ garantizamos que $X_{\pi,\varphi}$ tiene n puntos de rango $\geq \alpha$. □

Observación 2.6 *La prueba de la propósición previa muestra que el enunciado puede modificarse exigiendo adicionalmente que las fórmulas $(\psi_i(x) : i < n)$ no sólo sean incompatibles, sino que sean explícitamente contradictorias, es decir, que para $i < j < n$ exista una φ-formula que aparezca afirmada en una de las conjunciones ψ_i, ψ_j y negada en la otra.*

Proposición 2.7 *Para un ordinal α, un cardinal $\kappa \leq \omega$, una fórmula $\varphi = \varphi(x, y) \in L$ y un tipo parcial $\pi(x)$, sea $\Phi_{\varphi,\pi,\alpha\kappa}$ el conjunto de fórmulas obtenido al agregar a $\bigcup_{\eta \in {}^\alpha\kappa} \pi(x_\eta)$ todas las fórmulas de la forma*

$$\varphi(x_\eta, y_{s,i,j}) \leftrightarrow \neg\varphi(x_\nu, y_{s,i,j})$$

para $\eta, \nu \in {}^\alpha\kappa$, $s \in {}^{<\alpha}\kappa$, $i < j < \kappa$, $s^\frown i \subseteq \eta$ y $s^\frown j \subseteq \nu$. Obsérvese que para $\alpha \geq \omega$, $\Phi_{\varphi,\pi,\alpha,\kappa}$ es consistente si y sólo si para cada $n < \omega$, $\Phi_{\varphi,\pi,n,\kappa}$ lo es. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $R_\varphi(\pi) \geq \alpha$.

2. $\Phi_{\varphi,\pi,\alpha,\omega}$ es consistente.

Prueba: El caso $\alpha = 0$ es claro ya que $\Phi_{\varphi,\pi,0,\omega} = \pi(x_\emptyset)$. Tampoco hay dificultades en el caso α límite dado que en ese caso la consistencia de $\Phi_{\varphi,\pi,\alpha,\omega}$ equivale a que para cada $n < \omega$ $\Phi_{\varphi,\pi,n,\omega}$ sea consistente y esto a su vez equivale a que para cada $\beta < \alpha$, $\Phi_{\varphi,\pi,\beta,\omega}$ sea consistente. Consideremos ahora el caso $\alpha + 1$. Supongamos que $R_\varphi(\pi) \geq \alpha + 1$. De nuevo, basta ver que para cada número natural $n \leq \alpha$, $\Phi_{\varphi,\pi,n+1,\omega}$ es consistente. En otros términos, podemos suponer que $\alpha = n < \omega$. Por motivos similares, basta mostrar que para cada $m < \omega$, $\Phi_{\varphi,\pi,n+1,m}$ es consistente. Sea, pues, $m < \omega$. Como $R_\varphi(\pi) \geq n+1$, existen $\psi_0, \dots, \psi_{m-1}$ conjunciones explícitamente contradictorias de φ-fórmulas tales que $R_\varphi(\pi \cup \{\psi_i\}) \geq n$. Por hipótesis inductiva, para cada $l < m$ tenemos parámetros $(a^l_\eta : \eta \in {}^n m)$ y parámetros $(b^l_{s,i,j} : s \in {}^{<n}m,\ i < j < m)$ tales que $\models \pi(a^l_\eta) \wedge \psi_l(a^l_\eta)$ y para $i < j < m$ con $s^\frown i \subseteq \eta$ y $s^\frown j \subseteq \nu$ se tiene $\models \varphi(a^l_\eta, b^l_{s,i,j}) \leftrightarrow \neg\varphi(a^l_\nu, b^l_{s,i,j})$. La consistencia de $\Phi_{\varphi,\pi,n+1,m}$ se va a justificar ahora formando el árbol de parámetros adecuado colocando una base de m puntos a estos m árboles y reenumerando todos los puntos. Ponemos $a_{l^\frown\eta} = a^l_\eta$ y $b_{l^\frown s,i,j} = b^l_{s,i,j}$. Para definir finalmente $b_{\emptyset,i,j}$ usamos el hecho de que ψ_i y ψ_j son conjunciones explícitamente contradictorias de φ-fórmulas de modo que hay una φ-fórmula $\varphi(x, b_{\emptyset,i,j})$ que aparece en una de estas conjunciones y su negación aparece en la otra. Entonces $\models \varphi(a_{i^\frown\eta}, b_{\emptyset,i,j}) \leftrightarrow \neg\varphi(a_{j^\frown\nu}, b_{\emptyset,i,j})$ con independencia de la elección de η y ν. La aplicación $x_\eta \mapsto a_\eta$ y $y_{s,i,j} \mapsto b_{s,i,j}$ satisface entonces $\Phi_{\varphi,\pi,n+1,m}$. Para establecer ahora la otra dirección, supongamos que $\Phi_{\varphi,\pi,\alpha+1,\omega}$ es consistente y sea $(a_\eta : \eta \in {}^{\alpha+1}\omega)$ con $(b_{s,i,j} : s \in {}^{\leq\alpha}\omega,\ i < j < \alpha+1)$ una realización suya. Si $\alpha < \omega$ ponemos $\beta = \alpha$ y si α es un ordinal infinito, ponemos $\beta = \alpha + 1$. En cualquier caso, si $\eta \in {}^\beta\omega$ se tiene que $i^\frown\eta \in {}^{\alpha+1}\omega$. Sea $m < \omega$. Para $i < j < m$ tenemos que $\models \varphi(a_{i^\frown\eta}, b_{\emptyset,i,j}) \leftrightarrow \neg\varphi(a_{j^\frown\eta}, b_{\emptyset,i,j})$ con independencia de la elección de η. Pongamos $\psi_i(x) = \bigwedge_{j<m, j\neq i} \varphi^i(x, b_{\emptyset,i,j})$ donde $\varphi^i = \varphi$ si $\models \varphi(a_{i^\frown\eta}, b_{\emptyset,i,j})$ y $\varphi^i = \neg\varphi$ si $\models \neg\varphi(a_{i^\frown\eta}, b_{\emptyset,i,j})$. Se trata de una conjunción de φ-fórmulas que es satisfecha por $a_{i^\frown\eta}$ para cualquier $\eta \in {}^\beta\omega$. Además las fórmulas $(\psi_i : i < m)$ son explícitamente contradictorias. Falta finalmente garantizar que $R_\varphi(\pi \cup \{\psi_i\}) \geq \alpha$ y por la hipótesis inductiva ello puede hacerse mostrando que $\Phi_{\pi\cup\{\psi_i\},\varphi,\alpha,\omega}$ es consistente. Ello puede hacerse observando que la aplicación $x_\eta \mapsto a_{i^\frown\eta}$ junto con $y_{s,l,j} \mapsto b_{i^\frown s,l,j}$ satisface ese conjunto de fórmulas. □

Corolario 2.8 *Si $R_\varphi(\pi) \geq \omega$, entonces $R_\varphi(\pi) = \infty$.*

Prueba: Si $\Phi_{\pi,\varphi,\omega,\omega}$ es consistente, entonces para cada $n < \omega$, $\Phi_{\pi,\varphi,n,\omega}$ es consistente y por ello para cada ordinal α, $\Phi_{\pi,\varphi,\alpha,\omega}$ es consistente. □

Corolario 2.9 *Para cada π y φ existe una conjunción ψ de fórmulas de π tal que $R_\varphi(\pi) = R_\varphi(\psi)$.*

Prueba: $\Phi_{\pi,\varphi,\omega,\omega}$ es inconsistente si y sólo si existe una conjunción ψ de fórmulas de π tal que $\Phi_{\psi,\varphi,\omega,\omega}$ es inconsistente. □

Corolario 2.10 *1.* $R_\varphi(\pi \cup \{(\psi \vee \chi)\}) = \max\{R_\varphi(\pi \cup \{\psi\}), R_\varphi(\pi \cup \{\chi\})\}$.

2. Si $\pi(x)$ es un tipo parcial sobre A, entonces existe una extensión $p(x) \in S(A)$ de π tal que $R_\varphi(\pi) = R_\varphi(p)$.

Prueba: *1.* Es claro que $R_\varphi(\pi \cup \{(\psi \vee \chi)\})$ es mayor o igual que los otros dos rangos. Para mostrar la otra desigualdad mostramos por inducción en α que si $R_\varphi(\pi \cup \{(\psi \vee \chi)\}) \geq \alpha$ entonces $\max\{R_\varphi(\pi \cup \{\psi\}), R_\varphi(\pi \cup \{\chi\})\} \geq \alpha$. Para $\alpha = 0$ y α límite ello es claro. Consideremos el caso $\alpha + 1$. Sea $m < \omega$. Hay entonces $(\psi_i : i < 2m)$ conjunciones de φ-fórmulas tales que $R_\varphi(\pi \cup \{(\psi \vee \chi), \psi_i\}) \geq \alpha$ y $\models \neg\exists x(\psi_i(x) \wedge \psi_j(x))$ para $i < j < 2m$. Por hipótesis inductiva, para cada $i < 2m$: o bien $R_\varphi(\pi \cup \{\psi, \psi_i\}) \geq \alpha$ o bien $R_\varphi(\pi \cup \{\chi, \psi_i\}) \geq \alpha$. Reenumerando las ψ_i si es necesario, o bien $R_\varphi(\pi \cup \{\psi, \psi_i\}) \geq \alpha$ para cada $i < m$ o bien $R_\varphi(\pi \cup \{\chi, \psi_i\}) \geq \alpha$ para cada $i < m$. Como esto ocurre para cada $m < \omega$, para una de las dos fórmulas ψ, χ existe un conjunto infinito $I \subseteq \omega$ para el que para cada $m \in I$ existen las correspondientes fórmulas $(\psi_i : i < m)$. Para fijar notación digamos que es ψ. Entonces $R_\varphi(\pi \cup \{\psi\}) \geq \alpha + 1$ y el máximo es también $\geq \alpha + 1$.

2. Sea $R_\varphi(\pi) \geq \alpha$. El punto anterior garantiza la consistencia del conjunto de fórmulas

$$\pi \cup \{\neg\psi : \psi(x) \in L(A) \text{ y } R_\varphi(\pi \cup \{\psi\}) < \alpha\}$$

Cualquier $p(x) \in S(A)$ que extienda este conjunto de fórmulas cumple $R_\varphi(p) \geq \alpha$. En efecto, si $R_\varphi(p) < \alpha$ entonces existe $\psi \in p$ con $R_\varphi(\psi) < \alpha$, pero en ese caso $R_\varphi(\pi \cup \{\psi\}) < \alpha$ y tenemos al tiempo que $\neg\psi \in p$. □

Corolario 2.11 *Si $\pi(x)$ es un φ-tipo parcial, entonces $R_\varphi(\pi)$ es el rango de Cantor-Bendixson del cerrado $X_{\pi,\varphi} = \{\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C}) : \mathfrak{p} \vdash \pi\}$ en el espacio $S_\varphi(\mathfrak{C})$.*

Prueba: Fijemos ψ, conjunción de fórmulas de π tal que $R_\varphi(\pi) = R_\varphi(\psi)$. Por otro lado existe un abierto-cerrado en $S_\varphi(\mathfrak{C})$ que extiende a $X_{\pi,\varphi}$ y tiene el mismo rango de Cantor-Bendixson α en $S_\varphi(\mathfrak{C})$. Este abierto-cerrado es de la forma $\{\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C}) : \mathfrak{p} \vdash \chi\}$ para una combinación booleana χ de φ-fórmulas. Como $\pi \vdash \chi$, si consideramos $\psi \wedge \chi$ vemos que $R_\varphi(\psi \wedge \chi) = R_\varphi(\pi)$ y el rango de Cantor-Bendixson del espacio $\{\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C}) : \mathfrak{p} \vdash (\psi \wedge \chi)\}$ es todavía α. Pero ya hemos indicado antes que para abierto-cerrados de $S_\varphi(\mathfrak{C})$ las dos nociones de rango de cantor-Bendixson coinciden. Por tanto $R_\varphi(\pi) = \alpha$. □

Problema 2.1 *¿Puede generalizarse el corolario previo a cualquier tipo parcial $\pi(x)$? La dificultad está en que $\pi' = \pi'(x)$, el φ-tipo formado por todas las disyunciones de φ-fórmulas (con parámetros en $\mathfrak{C}$) que son consecuencia de π, tiene una clase propia de parámetros y en principio no se le pueden aplicar los resultados previos. Ziegler en [7] define $R_\varphi(\pi)$ como el rango de Cantor-Bendixson del cerrado $X_{\pi,\varphi} = \{\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C}) : \mathfrak{p}$ es consistente con $\pi\}$ en el espacio $S_\varphi(\mathfrak{C})$. Pillay en [4] lo define como el rango de Cantor-Bendixson del subespacio $X_{\pi,\varphi}$ (calculado en $X_{\pi,\varphi}$). La definición de Pillay coincide (por la Proposición 2.5) con las de Poizat en [5] y de Shelah en [6]. La cuestión es si las definiciones de Pillay y Ziegler coinciden con toda generalidad.*

Observación 2.12 *La finitud del rango local R_φ caracteriza la estabilidad de φ. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\varphi(x, y)$ es estable.*
2. *$R_\varphi(\pi) < \omega$ para cada tipo parcial π.*

Prueba: La estabilidad de φ equivale a que para cada conjunto infinito A, $|S_\varphi(A)| \leq |A|$ y también equivale a la inconsistencia del conjunto de fórmulas

$$\Gamma_\varphi = \{\varphi^{\eta(i)}(x_\eta, y_{\eta\restriction i}) : \eta \in {}^\omega 2,\ i < \omega\}$$

donde $\varphi^0 = \varphi$ y $\varphi^1 = \neg\varphi$. Si $R_\varphi(x = x) = \omega$ entonces el conjunto $\Phi_{x=x,\varphi,\omega,\omega}$ de la Proposición 2.7 es consistente, lo cual proporciona 2^ω φ-tipos completos distintos sobre un conjunto numerable de parámetros. Por otro lado, la consistencia de Γ_φ implica que para cada $n, m < \omega$, $\Phi_{x=x,\varphi,n,m}$ es consistente. En efecto, es fácil encontrar una inmersión $f : {}^{\leq n}m \to {}^{<\omega}2$ respecto a la relación de extensión entre secuencias. Para cada $\eta \in {}^n m$ sea además $\eta^* \in {}^\omega 2$ una extensión de $f(\eta)$. Sea $(a_\eta : \eta \in {}^\omega 2)$ junto con $(b_s : s \in {}^{<\omega}2)$ una realización de Γ_φ. Entonces $\models \varphi(a_\eta, b_s)$ si y sólo si $s \subseteq \eta$. Para $\eta \in {}^n m$ pongamos $\tilde{a}_\eta = a_{\eta^*}$ y para $s \in {}^{<n}m$ y $i < j < m$ pongamos $\tilde{b}_{s,i,j} = b_{f(s^\frown i)}$. Si $s^\frown i \subseteq \eta$ pero $s^\frown j \subseteq \nu$ con $i \neq j$, tenemos que $f(s^\frown i) \subseteq \eta^*$ pero $f(s^\frown i) \not\subseteq \nu^*$, de manera que $\models \varphi(\tilde{a}_\eta, \tilde{b}_{s,i,j})$ pero $\models \neg\varphi(\tilde{a}_\nu, \tilde{b}_{s,i,j})$ y por tanto $\models \varphi(\tilde{a}_\eta, \tilde{b}_{s,i,j}) \leftrightarrow \neg\varphi(\tilde{a}_\nu, \tilde{b}_{s,i,j})$ □

Lema 2.13 *Sea $\varphi(x,y)$ estable y sean $\mathfrak{p}(x)$ y $\mathfrak{q}(y)$ tipos globales. Entonces $d_{\mathfrak{p}}x\varphi(x,y) \in \mathfrak{q}$ si y sólo si $d_{\mathfrak{q}}y\varphi(x,y) \in \mathfrak{p}$.*

Prueba: Sea A un conjunto que contiene los parámetros de las fórmulas $d_{\mathfrak{p}}x\varphi(x,y)$ y $d_{\mathfrak{q}}y\varphi(x,y)$ que definen $\mathfrak{p} \restriction \varphi$ y $\mathfrak{q} \restriction \varphi$ y sean $(a_n : n \in \omega)$ y $(b_n : n \in \omega)$ sucesiones construidas de modo que $a_n \models \mathfrak{p} \restriction A\{b_i : i < n\}$ y $b_n \models \mathfrak{q} \restriction A\{a_i : i \leq n\}$. Si fuera $d_{\mathfrak{p}}x\varphi(x,y) \in \mathfrak{q}$ y $d_{\mathfrak{q}}y\varphi(x,y) \notin \mathfrak{p}$, tendríamos que $\models \varphi(a_m, b_n)$ si y sólo si $m > n$, con lo cual $\varphi(x,y)$ tendría la propiedad del orden. $\square$

Proposición 2.14 *Sea φ-estable. Sea $A = \overline{A}$ y $p(x) \in S(A)$.*

1. *Existe un único tipo $\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C})$ que es consistente con p y definible sobre A. Además $Mlt_\varphi(p) = 1$ y $\mathfrak{p}$ es el único punto en el subespacio $\{\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C}) : p$ es consistente con $\mathfrak{p}\}$ que tiene rango de Cantor-Bendixson $R_\varphi(p)$.*
2. *Si $A = M$ es un modelo, existe un único tipo $\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C})$ que extiende a $p \restriction \varphi$ y es definible sobre A. Además $Mlt_\varphi(p \restriction \varphi) = 1$ y $\mathfrak{p}$ es el único punto en el subespacio $\{\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C}) : p \restriction \varphi \subseteq \mathfrak{p}\}$ que tiene rango de Cantor-Bendixson $R_\varphi(p \restriction \varphi)$.*

Prueba: *1.* Sea $n = R_\varphi(p)$ y sea $X_{p,\varphi} = \{\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C}) : p$ es consistente con $\mathfrak{p}\}$. Sabemos que hay un número finito de tipos $\mathfrak{p} \in X_{p,\varphi}$ con rango de Cantor-Bendixson n. Su número es precisamente $Mlt_\varphi(p)$. Cada tal $\mathfrak{p}$ tiene un número finito de A-conjugados y por tanto es definible sobre $\overline{A} = A$. Veamos ahora la unicidad de tal extensión definible. Sean $\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x) \in S(\mathfrak{C})$ y supongamos que tanto $\mathfrak{p}_1 \restriction \varphi$ como $\mathfrak{p}_2 \restriction \varphi$ son definibles sobre A y son consistentes con p. Sea a una tupla de la longitud de y. Aplicando lo ya demostrado a $\varphi^{-1}(y,x) = \varphi(x,y)$ sabemos que existe una extensión $\mathfrak{q}(y) \in S(\mathfrak{C})$ del tipo de a sobre A con $\mathfrak{q} \restriction \varphi^{-1}$ definible sobre A. Utilizando el Lema 2.13 tenemos entonces que

$$\varphi(x,a) \in \mathfrak{p}_i \Leftrightarrow \models d_{\mathfrak{p}_i}x\varphi(x,a) \Leftrightarrow \mathfrak{q} \vdash d_{\mathfrak{p}_i}x\varphi(x,y) \Leftrightarrow \mathfrak{p}_i \vdash d_{\mathfrak{q}}y\varphi(x,y) \Leftrightarrow p \vdash d_{\mathfrak{q}}y\varphi(x,y).$$

Por tanto, $\mathfrak{p}_1 \restriction \varphi = \mathfrak{p}_2 \restriction \varphi$.

2. La existencia de $\mathfrak{p}$ se puede justificar del mismo modo, aunque en este caso hay otros argumentos también. Para la unicidad, sean $\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x) \in S_\varphi(\mathfrak{C})$ extensiones de $p \restriction \varphi$ definibles sobre M. Sus definiciones $\psi_1(y)$ y $\psi_2(y)$ son fórmulas con parámetros en M y definen el mismo conjunto de M. Por tanto la sentencia $\forall y(\psi_1(y) \leftrightarrow \psi_2(y))$ vale en M y en consecuencia vale también en $\mathfrak{C}$. Definen en $\mathfrak{C}$ la misma clase, esto es $\mathfrak{p}_1(x) = \mathfrak{p}_2(x)$. $\square$

Lema 2.15 *Sea $\varphi = \varphi(x,y)$ estable y sea $p(x) \in S_\varphi(M)$. Entonces p es definible mediante una combinación booleana positiva de fórmulas de la forma $\varphi(a,y)$ con $a \in M$.*

Prueba: Sean $X_1, \ldots, X_n$ una familia de subconjuntos de un conjunto A. Considérese la relación $R(a,b)$ que se da entre elementos a, b de A cuando $\forall i(1 \leq i \leq n)(a \in X_i \to b \in X_i)$. Es fácil ver que un subconjunto $X \subseteq A$ es una combinación booleana positiva de los conjuntos $X_1, \ldots, X_n$ si y sólo si $b \in X$ siempre que $a \in X$ y $R(a,b)$. Usamos este resultado en lo que sigue. Supongamos que p no es definible mediante una combinación booleana positiva de fórmulas de la forma indicada. Definimos inductivamente tuplas a_i, b_i, c_i $(i \in \omega)$ de elementos de M. Supongamos que a_j, b_j, c_j ya han sido definidos para $j < i$. Por hipótesis $\{a \in A : \varphi(x,a) \in p\}$ no es una combinación booleana positiva de los conjuntos $X_j = \{a \in A : \models \varphi(c_j, a)\}$ con $j \leq i$. Por tanto hay $a_i, b_i \in A$ tales que $\varphi(x, a_i) \in p$, $\neg\varphi(x, b_i) \in p$ y para cada $j < i$, si $\models \varphi(c_j, a_i)$, entonces $\models \varphi(c_j, b_i)$. Sea entonces c_i una realización del tipo finito $p \restriction \{a_j, b_j : j \leq i\}$ (que existe porque M es un modelo). La secuencia de tuplas obtenida de este modo tiene la propiedad de que $\models \varphi(c_j, a_i) \wedge \neg\varphi(c_j, b_i)$ para $i \leq j$

pero $\models \varphi(c_j, a_i) \to \varphi(c_j, b_i)$ para $j < i$. Por el Teorema de Ramsey, podemos suponer que siempre $\models \neg\varphi(c_j, a_i)$ para $j < i$ o siempre $\models \varphi(c_j, b_i)$ para $j < i$. En el primer caso tenemos que $i \leq j$ si y sólo si $\models \varphi(c_j, a_i)$. En el segundo caso $i \leq j$ si y sólo si $\models \neg\varphi(c_j, b_i)$. En cualquier caso $\varphi(x, y)$ tiene la propiedad del orden y por tanto es inestable. □

Proposición 2.16 *Sea φ estable y sea $A = \overline{A} \subseteq M$ y sea $\pi(x)$ el tipo parcial sobre A formado por todas las fórmulas $\psi(x) \in \mathrm{tp}(a/A)$ que son equivalentes a combinaciones booleanas positivas de φ-fórmulas sobre M. Entonces $Mlt_\varphi(\pi) = 1$ y hay sólo un φ-tipo global que extiende a $\pi(x)$ y es definible sobre A.*

Prueba: Consideramos indistintamente a $\pi(x)$ como un φ-tipo parcial sobre M o como un tipo parcial sobre A según convenga. Cualquier $\mathfrak{p} \in S_\varphi(\mathfrak{C})$ de rango de Cantor-Bendixson $R_\varphi(\pi)$ es definible sobre A. Sean $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in S_\varphi(\mathfrak{C})$ dos extensiones de π definibles sobre A mediante correspondientes fórmulas $\psi_i(y) \in L(A)$, $i = 1, 2$. Por el Lema 2.15, el tipo $p_i(x) = \mathfrak{p}_i \restriction M$ es definible mediante una fórmula $\psi'_i(y) \in L(M)$ que es una combinación booleana positiva de fórmulas de la forma $\varphi(m, y)$ con $m \in M$, es decir de $\varphi^{-1}(y, x)$-fórmulas sobre M. La fórmula $\psi'_i(y)$ es entonces también una definición de $\mathfrak{p}_i$. Sea a una tupla de la longitud de y y escojamos un tipo global $\mathfrak{q} \in S(\mathfrak{C})$ que extiende a $\mathrm{tp}(a/A)$ y cuya restricción a φ^{-1} se define sobre A. El φ^{-1}-tipo $\mathfrak{q} \restriction \varphi^{-1}$ es entonces también definible sobre M mediante una combinación booleana positiva $\theta(x)$ de φ-fórmulas sobre M. Podemos repetir el argumento de la demostración de la Proposición 2.14 con $\psi'_i(y) = d_{\mathfrak{p}_i} x\varphi(x, y)$ y $\theta(x) = d_{\mathfrak{q}} y\varphi(x, y)$ obteniendo:

$$\varphi(x, a) \in \mathfrak{p}_i \Leftrightarrow \models \psi_i(a) \Leftrightarrow \models \psi'_i(a) \Leftrightarrow \mathfrak{q} \vdash \psi'_i(y) \Leftrightarrow \mathfrak{p}_i \vdash \theta(x) \Leftrightarrow \pi \vdash \theta(x).$$

Para justificar el paso más delicado de la equivalencia, obsérvese que si $\mathfrak{q} \nvdash \psi'_i(y)$ entonces $\mathfrak{q} \vdash \neg\psi'_i(y)$ con lo cual $\mathfrak{q} \vdash \neg\psi(y)$ y $\models \neg\psi(a)$. Esto establece que $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$. □

Lema 2.17 *Si $p(x) \in S(\overline{A})$, entonces $R_\varphi(p) = R_\varphi(p \restriction A)$.*

Prueba: Como $p \restriction A$ puede ser considerado como un tipo parcial sobre $\overline{A}$, por el Corolario 2.10, existe una extensión $q \in S(\overline{A})$ de $p \restriction A$ con $R_\varphi(p \restriction A) = R_\varphi(q)$. Existe entonces un $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ con $p^f = q$. Como f induce un homeomorfismo entre los espacios asociados, $R_\varphi(p) = R_\varphi(q)$. □

Corolario 2.18 *Suponemos que T es estable. Sea $A = \overline{A}$, $p(x) \in S(A)$, sea $\mathfrak{p} \in S(\mathfrak{C})$ su extensión global no bifurcante, sea $\varphi(x, y) \in L$ y sea $c \in A$ el parámetro canónico de la relación definida por $d_{\mathfrak{p}} x\varphi(x, y)$. Entonces $R_\varphi(p \restriction c) = R_\varphi(p)$ y $Mlt_\varphi(p \restriction c) = 1$. Además $\mathfrak{p} \restriction \varphi$ es el único φ-tipo global completo que es consistente con $p \restriction c$ y definible sobre $\overline{c}$. Su rango de Cantor-Bendixson en el espacio $X_{p\restriction c,\varphi}$ es $R_\varphi(p)$.*

Prueba: Como $\mathfrak{p} \restriction \varphi$ es definible sobre $\overline{c}$ (pues lo es sobre c) por la Proposición 2.14 $R_\varphi(p \restriction \overline{c}) = R_\varphi(p)$ y $Mlt_\varphi(p \restriction \overline{c}) = 1$ y $\mathfrak{p} \restriction \varphi$ es el único elemento de rango $R_\varphi(p)$ del espacio $X_{p\restriction\overline{c},\varphi}$ de los puntos de $S_\varphi(\mathfrak{C})$ que son consistentes con $p \restriction \overline{c}$. Por el Lema 2.17, $R_\varphi(p \restriction \overline{c}) = R_\varphi(p \restriction c)$. Así pues, $R_\varphi(p) = R_\varphi(p \restriction c)$.

Supongamos ahora que $\mathfrak{q} \in S(\mathfrak{C})$ es una extensión de $p \restriction c$ y que $\mathfrak{q} \restriction \varphi$ es $\overline{c}$-definible. Por la Proposición 2.14 $\mathfrak{q} \restriction \varphi$ tiene rango $R_\varphi(\mathfrak{q} \restriction \overline{c})$ en el espacio $X_{\mathfrak{q}\restriction\overline{c},\varphi}$ de los puntos de $S_\varphi(\mathfrak{C})$ que son consistentes con $\mathfrak{q} \restriction \overline{c}$. Pero $R_\varphi(\mathfrak{q} \restriction \overline{c}) = R_\varphi(p \restriction \overline{c}) = R_\varphi(p)$ pues existe $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/c)$ tal que $\mathfrak{q} \restriction \overline{c} = p^f \restriction \overline{c}$, ya que son tipos completos sobre $\overline{c}$ que coinciden en c. Hay sólo un tipo de rango $R_\varphi(p)$ en el espacio $X_{\mathfrak{q}\restriction\overline{c},\varphi}$ y este único tipo tiene que ser $\mathfrak{q} \restriction \varphi = \mathfrak{p}^f \restriction \varphi$. Pero como f fija c y $\mathfrak{p} \restriction \varphi$ es c-definible, $\mathfrak{p}^f \restriction \varphi = \mathfrak{p} \restriction \varphi$. Por tanto $\mathfrak{q} \restriction \varphi = \mathfrak{p} \restriction \varphi$.

Finalmente, sea $\mathfrak{q} \in S(\mathfrak{C})$ una extensión de $p \upharpoonright c$ para la que $\mathfrak{q} \upharpoonright \varphi$ tiene también rango de Cantor-Bendixson $R_\varphi(p)$ en $X_{p\upharpoonright c,\varphi}$.Entonces $\mathfrak{q} \upharpoonright \varphi$ tiene un número finito de c-conjugados y por ello es $\bar{c}$-definible. Podemos aplicar lo anteriormente establecido para establecer que $\mathfrak{q} \upharpoonright \varphi = \mathfrak{p} \upharpoonright \varphi$, lo cual muestra que $Mlt_\varphi(p \upharpoonright c) = 1$. $\square$

3. Teorías monobasadas

Definición 3.1 *T es* monobasada *si y sólo si para cada A y a,* $\mathrm{Cb}(a/A) \subseteq \overline{a}$

Observaciones 3.2 *1. T es monobasada si y sólo si T^{eq} lo es, es decir, si y sólo si para cada $A \subseteq \mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ y cada tupla $a \in \mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$, $Cb(a/A) \subseteq \overline{a}$.*

2. T es monobasada si y sólo si $T(C)$ lo es.

Prueba: *1.* Es inmediato que si T^{eq} es monobasada, también lo es T. Para mostrar lo contrario supongamos primero que a es una tupla de $\mathfrak{C}$ pero $A \subseteq \mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$. Escojamos $A' \subseteq \mathfrak{C}$ tal que $A' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A a$ y $A \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A')$. Entonces $\mathrm{Cb}(a/A) = \mathrm{Cb}(a/AA') = \mathrm{Cb}(a/A')$ y por hipótesis sobre T, $\mathrm{Cb}(a/A') \subseteq \overline{a}$. Ahora supongamos que a es una tupla de $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$. Escogemos una tupla a' en $\mathfrak{C}$ tal que $a \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a')$ y $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_a A$. Por lo ya establecido, $\mathrm{Cb}(a'/A) \subseteq \overline{a'}$ y por independencia, $\mathrm{Cb}(a'/A) \subseteq \overline{a}$. Por el Lema 1.9 se obtiene entonces que también $\mathrm{Cb}(a/A) \subseteq \overline{a}$.

2. Sea T monobasada. Como $\mathrm{stp}_T(a/AC) = \mathrm{stp}_{T(C)}(a/A)$,

$$\mathrm{Cb}_{T(C)}(a/A) \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(C\mathrm{Cb}_T(a/AC)) \subseteq \overline{Ca} = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}_{T(C)}(a).$$

Supongamos ahora que $T(C)$ es monobasada. Queremos ver que $\mathrm{Cb}(a/A) \subseteq \overline{a}$. Para ello podemos suponer que $aA \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|} C$. En ese caso

$$\mathrm{Cb}(a/A) = \mathrm{Cb}(a/AC) \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(C\mathrm{Cb}_{T(C)}(a/AC)) \subseteq \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}_{T(C)}(a) = \overline{Ca}.$$

Como por otro lado $\mathrm{Cb}(a/A) \subseteq \overline{A}$ y $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_a C$, concluimos que $\mathrm{Cb}(a/A) \subseteq \overline{a}$. $\square$

Proposición 3.3 *T es monobasada si y sólo si para cada A y B: $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{\overline{A}\cap\overline{B}} B$.*

Prueba: Sea T monobasada y sea a una tupla de A. Como $\mathrm{Cb}(a/B) \subseteq \overline{a} \subseteq \overline{A}$ y además $\mathrm{Cb}(a/B) \subseteq \overline{B}$, tenemos que $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{\overline{A}\cap\overline{B}} B$. A la inversa, por la condición de la derecha tenemos que $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{\overline{a}\cap\overline{A}} A$, y por tanto $\mathrm{Cb}(a/A) \subseteq \overline{a} \cap \overline{A} \subseteq \overline{a}$. $\square$

4. Fórmulas débilmente normales

Definición 4.1 *Una relación definible R es* débilmente normal *si para cada secuencia $(R_i : i < \omega)$ de conjugados distintos de R, cada $a \in R$ pertenece sólo a un número finito de las relaciones R_i. Así pues, si $\varphi(x, y) \in L$ y $R = \varphi(\mathfrak{C}, a)$, esto significa que para cada secuencia $(a_i : i < \omega)$ tal que $a_i \equiv a$ y $\varphi(\mathfrak{C}, a_i) \neq \varphi(\mathfrak{C}, a_j)$ para $i \neq j$, se tiene que $\{i < \omega : \models \varphi(b, a_i)\}$ es finito para cada b. Se dice entonces también que $\varphi(x, a)$ es débilmente normal.*

Observación 4.2 *Las fórmulas débilmente normales están cerradas bajo conjunción y disyunción.*

Lema 4.3 *Sea $\varphi(x,y) \in L$ y sea c el parámetro canónico de la relación definida por $\varphi(x,a)$. Entonces $\varphi(x,a)$ es débilmente normal si y sólo si $c \in \overline{b}$ para cada $b \models \varphi(x,a)$.*

Prueba: Sea $\varphi(x,a)$ débilmente normal, sea $\models \varphi(b,a)$ y supongamos que $(c_i : i < \omega)$ es una secuencia de elementos distintos de la órbita de c en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/b)$. Para cada $i < \omega$ sea $f_i \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/b)$ tal que $f_i(c) = c_i$. Entonces c_i es el parámetro canónico de la relación R_i definida por $\varphi(x, f_i(a))$ y $b \in R_i$. Si $R_i = R_j$ entonces $c_i = c_j$. Esto contradice entonces la definición de débilmente normal.

Ahora supongamos que $\varphi(x,a)$ no es débilmente normal. Por compacidad, para λ arbitrariamente grande encontramos $(a_i : i < \lambda)$ y b con $\varphi(\mathfrak{C}, a_i) \neq \varphi(\mathfrak{C}, a_j)$ para $i \neq j$, y con $a_i \equiv a$ y $\models \varphi(b, a_i)$ para todo i. Escogemos c_i con $ac \equiv a_i c_i$. Observemos que $c_i \neq c_j$ para $i \neq j$. Si λ es suficiente mente grande, hay un $i < \lambda$ con $c_i \notin \overline{b}$. Por isomorfismo, hay b' tal que $\models \varphi(b', a)$ y $c \notin \overline{b'}$. $\square$

Lema 4.4 *Sea $A = \overline{A}$ y sea $\Phi(x)$ un conjunto de fórmulas con parámetros en A y tal que para cada tipo $p(x) \in S(A)$ y cada fórmula $\varphi(x,y) \in L$ existe $\psi(x) \in \Phi(x) \cap p(x)$ tal que $R_\varphi(p) = R_\varphi(\psi(x))$ y $Mlt_\varphi(\psi(x)) = 1$. Entonces toda fórmula $\theta(x) \in L(A)$ es equivalente a una combinación booleana de fórmulas de Φ.*

Prueba: Vemos primero que si $p(x), q(x) \in S(A)$ tienen las mismas fórmulas de $\Phi(x)$, entonces son iguales. Sea $\varphi(x,y) \in L$ y sea $n = R_\varphi(p)$. Comprobaremos que $p \restriction \varphi = q \restriction \varphi$. Sea $\psi(x) \in \Phi(x) \cap p(x)$ la fórmula garantizada para p y φ en la hipótesis. Como $R_\varphi(\psi(x)) = n$ y también $\psi(x) \in q$, tenemos $n \geq R_\varphi(q)$. Por simetría, $n = R_\varphi(q)$. Si $p \restriction \varphi \neq q \restriction \varphi$, entonces existe una φ-formula $\chi(x)$ tal que $\chi \in p$ pero $\neg\chi \in q$. Consideremos entonces las fórmulas $\psi(x) \wedge \chi(x)$ y $\psi(x) \wedge \neg\chi(x)$. Como las dos tienen φ-rango n y $Mlt_\varphi(\psi(x)) = 1$, se obtiene una contradicción.

Ahora queda justificar que toda fórmula $\theta(x) \in L(A)$ es equivalente a una combinación booleana de fórmulas de Φ. Para ello usamos un argumento estándar. Sea $\Sigma(x)$ el conjunto de las fórmulas $\sigma(x) \in L(A)$ que son combinación booleana de instancias de fórmulas de Φ y verifican $\models \theta(x) \to \sigma(x)$. Basta ver que $\Sigma(x) \vdash \sigma(x)$. En caso contrario hay $a \models \Sigma(x)$ tal que $\models \neg\theta(a)$. De la definición de Σ se sigue que $\theta(x)$ es consistente con el conjunto de las fórmulas $\sigma(x) \in L(A)$ que son combinación booleana de fórmulas de Φ y son satisfechas por a, de manera que hay un b que satisface $\theta(x)$ y satisface las mismas fórmulas de Φ que a. Los tipos $\mathrm{tp}(a/A)$ y $\mathrm{tp}(b/A)$ son entonces distintos aunque contienen las mismas fórmulas de Φ. $\square$

Teorema 4.5 *T es monobasada si y sólo si en T^{eq} toda fórmula es equivalente a una combinación booleana de fórmulas débilmente normales. De hecho, basta que toda fórmula de T sea equivalente a una combinación booleana de fórmulas débilmente normales de T^{eq}.*

Prueba: Supongamos primero que toda fórmula de T es equivalente a una combinación booleana de fórmulas débilmente normales de T^{eq}. Mostraremos que $\mathrm{Cb}(a/A) \subseteq \overline{a}$. Sea M un modelo ω-saturado tal que $A \subseteq M$ y $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A M$. Sea $\mathfrak{p}$ la extensión global no bifurcante de $\mathrm{stp}(a/A)$ y $p = \mathfrak{p} \restriction M$. Claramente, $a \models p$. Sea $C = \overline{a} \cap \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$. Si $\varphi(x) \in L(M)$ es débilmente normal y $\models \varphi(a)$, entonces (por el Lema 4.3) el parámetro canónico c_φ de φ es algebraico sobre a. Así pues, $c_\varphi \in C$. Sea $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/C)$. Como f fija C y toda fórmula débilmente normal en $p(x)$ equivale a una fórmula con parámetros en C, las fórmulas débilmente normales de p pertenecen a p^f. El mismo argumento muestra que las fórmulas débilmente normales de p pertenecen a $p^{f^{-1}}$ y por tanto que las de p^f pertenecen a p. En definitiva, p y p^f tienen las mismas fórmulas débilmente normales. Como M es ω-saturado, toda fórmula $\varphi(x) \in L(M)$ es equivalente a una combinación de fórmulas débilmente normales con parámetros en M. En consecuencia, $p^f = p$. Ello implica que $\mathfrak{p}^f = \mathfrak{p}$ y por tanto que f fija $\mathrm{Cb}(a/A)$. En definitiva, $\mathrm{Cb}(a/A) \subseteq C \subseteq \overline{a}$.

Supongamos ahora que T es monobasada. Sin perder generalidad, $T = T^{\mathrm{eq}}$. Vamos a usar el Lema 4.4 para obtener el resultado. Fijemos, pues, una fórmula $\varphi = \varphi(x, y) \in L$ y sea $p(x)$ un tipo completo estacionario. Sea $\mathfrak{p}$ la extensión global no bifurcante de p y sea c el parámetro canónico de la relación definida por $d_{\mathfrak{p}} x\varphi(x, y)$. Veremos que podemos obtener una fórmula débilmente normal $\psi(x, c) \in p(x)$ tal que $R_\varphi(p) = R_\varphi(\psi(x, c))$ y $Mlt_\varphi(\psi(x, c)) = 1$.

Sea $b \models p \restriction c$ y sea $\mathfrak{q} \in S(\mathfrak{C})$ la extensión global no bifurcante de $\mathrm{stp}(b/c)$. Entonces $\mathfrak{q} \restriction \varphi$ es $\overline{c}$-definible y es consistente con $p \restriction c$. Por el Corolario 2.18 $\mathfrak{q} \restriction \varphi = \mathfrak{p} \restriction \varphi$. Entonces, si $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/\mathrm{Cb}(b/c))$ resulta que $\mathfrak{q}^f = \mathfrak{q}$ y por tanto $(\mathfrak{q} \restriction \varphi)^f = \mathfrak{q} \restriction \varphi$ y $(\mathfrak{p} \restriction \varphi)^f = \mathfrak{p} \restriction \varphi$, con lo cual $f(c) = c$. En definitiva, $c \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\mathrm{Cb}(b/c))$ para cada $b \models p \restriction c$. Como T es monobasada, $\mathrm{Cb}(b/c) \subseteq \overline{b}$ para cualquier b. Por tanto $c \in \overline{b}$ para cada $b \models p \restriction c$. Por compacidad, hay una fórmula $\psi(x, c) \in p \restriction c$ tal que $c \in \overline{b}$ para cada $b \models \psi(x, c)$. Por el Corolario 2.18 sabemos que $R_\varphi(p) = R_\varphi(p \restriction c)$ y $Mlt_\varphi(p \restriction c) = 1$. Podemos encontrar entonces tal $\psi(x, c)$ de modo que adicionalmente $R_\varphi(p \restriction c) = R_\varphi(\psi(x, c))$ y $Mlt_\varphi(\psi(x, c)) = 1$. Verificamos ahora que $\psi(x, c)$ es una fórmula débilmente normal. Si no lo es, por compacidad, para λ arbitrariamente grande hay $(c_i : i < \lambda)$ distintos y b tales que para cada $i < \lambda$, $c \equiv c_i$ y $\models \psi(b, c_i)$. Entonces $c_i \in \overline{b}$ para cada $i < \lambda$. Pero esto no es posible para $\lambda > |T|$. □

5. Pseudoplanos

Definición 5.1 *Un* cuasidiseño *es una relación binaria R de dominio A y recorrido B tal que*

1. *Para cada $a \in A$ hay infinitos $b \in B$ tales que aRb.*
2. *Para cada $b \in B$ hay infinitos $a \in A$ tales que aRb.*
3. *Para cada $b_1, b_2 \in B$ distintos hay sólo un número finito de $a \in A$ tales que aRb_1 y aRb_2.*

Un pseudoplano *es un cuasidiseño que cumple la condición adicional de que para cada $a_1, a_2 \in A$ distintos hay sólo un número finito de $b \in B$ tales que a_1Rb y a_2Rb.*

Teorema 5.2 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es monobasada.*
2. *En $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ no hay ningún cuasidiseño definible mediante un tipo completo sobre $\emptyset$.*
3. *En $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ no hay ningún pseudoplano definible mediante un tipo completo sobre $\emptyset$.*

Prueba: Es obvio que *2* $\Rightarrow$ *3*. Mostramos primero que *3* $\Rightarrow$ *2* y después estableceremos que *1* $\Leftrightarrow$ *2*. Trabajaremos todo el tiempo en $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$.

3 $\Rightarrow$ *2*. Supongamos que $r(x, y) \in S(\emptyset)$ define un cuasidiseño. Fijemos c para el que existe algún b con $\models r(b, c)$. Observemos que si $(b_i : i < \omega)$ es una secuencia de elementos distintos tales que $\models r(b_i, c)$ para cada $i < \omega$, entonces $c \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(b_i : i < \omega)$. En efecto, en otro caso habría $c' \neq c$ tal que $c' \equiv_{(b_i:i<\omega)} c$, con lo cual habría infinitos elementos b tales que $\models r(b,c)$ y $\models r(b,c')$, en contra de la definición de cuasidiseño. Si $\models r(b,c)$ entonces $c \notin \overline{b}$. Por compacidad hay entonces un máximo n para el que existen $b_1,\ldots,b_n$ distintos y tales que $\models r(b_i,c)$ y $c \notin \overline{b_1,\ldots,b_n}$. Fijemos tales $b_1,\ldots,b_n$ para c. Sea d el conjunto $\{b_1,\ldots,b_n\}$ considerado como objeto imaginario y sea $p(w,y) = \mathrm{tp}(dc)$. Verificamos que $p(w,y)$ define un pseudoplano. Como $d \in \overline{b_1,\ldots,b_n}$ pero $c \notin \overline{b_1,\ldots,b_n}$, tenemos que $c \notin \overline{d}$. Como $b_i \in \overline{d}$ pero $b_i \notin \overline{c}$, se tiene que $d \notin \overline{c}$. Sea $c' \neq c$. Si $\models p(e,c)$, entonces e es un conjunto $\{e_1,\ldots,e_n\}$ donde $\models r(e_i,c)$ para cada i. Como no hay más que un número finito de elementos b tales que $\models r(b,c)$ y $\models r(b,c')$, tampoco hay más que un número finito de elementos e tales que $\models p(e,c)$ y $\models p(e,c')$. Con esto queda establecido que p define un cuasidiseño. Para ver que es un pseudoplano, supongamos que $e \neq e'$ y hay infinitos elementos c tales que $\models p(e,c)$ y $\models p(e',c)$. Entonces $e = \{b_1,\ldots,b_n\}$ y $e' = \{b'_1,\ldots,b'_n\}$, donde $\models r(b_i,c)$ y $\models r(b'_i,c)$ para estos infinitos objetos c. Como $e \neq e'$, podemos suponer que $b'_1 \notin e$. Por maximalidad de n, $c \in \overline{b_1,\ldots,b_n,b'_1}$ para todo tal c. Pero esto es una contradicción pues el número de los c en cuestión no está acotado.

1 $\Rightarrow$ *2*. Supongamos que $r(x,y) = \mathrm{tp}(bc)$ define un cuasidiseño. Entonces $c \notin \overline{b}$. Ahora veremos que $c \in \mathrm{Cb}(b/c)$, lo cual muestra que $\mathrm{Cb}(b/c) \not\subseteq \overline{b}$ y muestra que T no es monobasada. Sea f un automorfismo de $\mathfrak{C}$ que fija todos los puntos de $\mathrm{Cb}(b/c)$. Entonces $r(x,c)$ y $r(x,f(c))$ están contenidos en tipos paralelos y tienen por ello una extensión no bifurcante común, que debe ser no algebraica pues son tipos no algebraicos. Pero si $c \neq f(c)$ entonces, de acuerdo con la definición de cuasidiseño, $r(x,c) \cup r(x,f(c))$ es algebraico. En definitiva, $f(c) = c$, de modo que $c \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\mathrm{Cb}(b/c)) = \mathrm{Cb}(b/c)$.

2 $\Rightarrow$ *1*. La argumentación va a depender de propiedades del φ-rango R_φ de ciertos φ-tipos y por ello es conveniente tener presente que, de acuerdo con el Corolario 2.11 , este rango puede ser calculado también como el rango del cerrado correspondiente en el espacio $S_\varphi(\mathfrak{C})$. Supongamos que T no es monobasada. Entonces hay a y A tales que $\mathrm{Cb}(a/A) \not\subseteq \overline{a}$. Podemos suponer que A es un modelo $M = A$. Como $\mathrm{Cb}(a/M)$ es interdefinible con la secuencia formada por los parámetros canónicos c_φ de las definiciones de los φ-tipos $\mathrm{tp}(a/M) \upharpoonright \varphi$ (o lo que es lo mismo, de las definiciones de los φ-tipos globales $\mathfrak{q} \upharpoonright \varphi$ asociados a la extensión global no bifurcante $\mathfrak{q}$ de $\mathrm{tp}(a/M)$), existe una $\varphi = \varphi(x,y) \in L$ para la cual el correspondiente parámetro canónico c_φ no pertenece a $\overline{a}$. Sea $p = \mathrm{tp}(a/M) \upharpoonright \varphi$. En esta situación

$$R_\varphi(p) > 0.$$

En efecto, si fuera $R_\varphi(p) = 0$ entonces p tendría sólo un número finito de extensiones en $S_\varphi(\mathfrak{C})$ y como además es un φ-tipo sobre un modelo tendría sólo una tal extensión $\mathfrak{p}$. Como también $\mathrm{tp}(a/\mathfrak{C}) \upharpoonright \varphi$ extiende a p, $a \models \mathfrak{p}$. Si un automorfismo f fija a entonces fija $\mathfrak{p}$ y por tanto también el parámetro canónico de su definición, que es c_φ. Por tanto en ese caso tenemos que $c_\varphi \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a) \subseteq \overline{a}$, en contra de la hipótesis sobre c_φ.

Sea $n > 0$ el menor número natural para el que hay φ, M y a tales que $R_\varphi(p) = n$, $p = \mathrm{tp}(a/M) \upharpoonright \varphi$ y $c_\varphi \notin \overline{a}$ y fijemos tales φ, M, a, p y $c = c_\varphi$ para lo que sigue. Existe $N \succeq M$ saturado y de cardinalidad mayor que la de M para el que $R_\varphi(q) = n-1$ con $q = \mathrm{tp}(a/M) \upharpoonright \varphi$. En efecto, por propiedades básicas del rango de Cantor-Bendixson es claro que en el subespacio $\{\mathfrak{q} \in S_\varphi(\mathfrak{C}) : p \subseteq \mathfrak{q}\}$ hay puntos de todos los rangos de Cantor-Bendixson $< n$. Escojamos una φ-fórmula $\psi(x)$ que aparezca en alguno de estos tipos de rango $n-1$ pero que no aparezca en la extensión de $p(x)$ de rango n, sea $N \succeq M$ un modelo grande y saturado que contenga los parámetros de $\psi(x)$ y sea $q(x) \in S_\varphi(N)$ una extensión de p con $\psi(x) \in q$. Entonces $R_\varphi(q) = n-1$. Por conjugación podemos obtener tal q y N con $a \models q$. Sea $b \in N$ el parámetro canónico de la definición de q. Recordemos que $c = c_\varphi \in M$ y sea $r(u,v) = \mathrm{tp}(bc)$. Comprobaremos que $r(u,v)$ define un cuasidiseño.

En primer lugar observamos que $c \notin \overline{b}$. Por elección de n mínimo y porque $R_\varphi(q) < n$ tenemos que $b \notin \overline{a}$. Sin embargo $c \in \overline{a}$. Por tanto $c \notin \overline{b}$.

En segundo lugar vamos a ver que $b \notin \overline{c}$. La razón es que $b \notin M$ pero $c \in M$. b es el parámetro canónico de la definición del único φ-tipo $\mathfrak{q} \in S_\varphi(\mathfrak{C})$ que extiende a q y tiene rango de Cantor-Bendixson $n-1$ en $S_\varphi(\mathfrak{C})$. Para garantizar que $b \notin M$ basta entonces comprobar que $\mathfrak{q}$ no es M-definible. Como también extiende a p, si fuera M-definible coincidiría con $\mathfrak{p}$ el único φ-tipo global que extiende a p y es M-definible. Pero $\mathfrak{p}$ tiene rango n.

Para finalizar, nos queda verificar que si $c \neq c'$, $\models r(b,c)$ y $\models r(b,c')$ entonces $b \in \overline{cc'}$. Debido a la saturación de N y a que sólo nos interesa $\mathrm{tp}(c'/cb)$, podemos suponer para ello que $c' \in N$. Sea $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/b)$ tal que $f(c) = c'$. Por la saturación de N podemos escoger tal f con la propiedad adicional de que $f(N) = N$. Entonces c' es el parámetro canónico de la definición de la única extensión $\mathfrak{p}^f \in S_\varphi(\mathfrak{C})$ de p^f con rango de Cantor-Bendixson n. Como $f(b) = b$, $\mathfrak{q}^f = \mathfrak{q}$ y $q^f = q$. Por tanto $a \models p^f(x)$ y así $a \models p(x) \cup p^f(x)$. Sea $s(x)$ el tipo parcial sobre $\overline{c}$ formado por las fórmulas $\psi(x) \in \mathrm{tp}(a/\overline{c})$ que son equivalentes a una combinación booleana positiva de φ-fórmulas (con parámetros en N o en M, según se quiera), sea $s'(x)$ el tipo parcial sobre $\overline{c'}$ formado por las fórmulas $\psi(x) \in \mathrm{tp}(a/\overline{c'})$ que son equivalentes a una combinación booleana positiva de φ-fórmulas (con parámetros en N on $f(M)$, según se quiera) y finalmente sea $t(x)$ el tipo parcial sobre $\overline{cc'}$ formado por las fórmulas $\psi(x) \in \mathrm{tp}(a/\overline{cc'})$ que son equivalentes a una combinación booleana positiva de φ-fórmulas (con parámetros en N). Por la Proposición 2.16, $Mlt_\varphi(s) = Mlt_\varphi(s') = Mlt_\varphi(t) = 1$. Como $\mathfrak{p}$ es una extensión de $s(x)$ definible sobre c, $R_\varphi(s) = n$ y $\mathfrak{p}$ es su extensión global de rango n. Similarmente, $R_\varphi(s') = n$ y $\mathfrak{p}^f$ es su extensión global de rango n.

Vamos a mostrar ahora que $R_\varphi(s(x) \cup s'(x)) = n-1$. Para ello observemos que $\mathfrak{p}^f \neq \mathfrak{p}$ de modo que el único punto de rango n en el cerrado determinado por s en $S_\varphi(\mathfrak{C})$ no pertenece al cerrado determinado por s' pues en ese cerrado sólo hay un punto de rango n y es $\mathfrak{p}^f$. Por tanto todos los puntos en el cerrado definido por $s(x) \cup s'(x)$ tienen rango menor que n. Como $s(x) \cup s'(x) \subseteq q(x)$ debe ser entonces $R_\varphi(r(x) \cup r'(x)) = n-1$. Tenemos que $s(x) \cup s'(x) \subseteq t(x) \subseteq q(x)$, de modo que $R_\varphi(t) = n-1$. Ello implica que $\mathfrak{q}$ es definible sobre cc' y por tanto que $b \in \overline{cc'}$.

$\square$

Referencias

[1] E. Hrushovski and A. Pillay. Weakly normal groups. In The Paris Logic Group, editor, *Logic Colloquium' 87*, pages 233–244. North Holland P.C., 1987.

[2] A. Pillay. Forking, normalization and canonical bases. *Annals of Pure and Applied Logic*, 32:61–81, 1986.

[3] A. Pillay. Stable theories, pseudoplanes and the number of countable models. *Annals of Pure and Applied Logic*, 43:147–160, 1989.

[4] A. Pillay. *Geometric Stability Theory.* Oxford University Press, 1996.

[5] B. Poizat. *Cours de Théorie des Modèles.* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 82, rue Racine 69100 Villeurbanne, France, 1985. Diffusé par OFFILIB.

[6] S. Shelah. *Classification Theory.* North Holland P.C., Amsterdam, 1978.

[7] M. Ziegler. Stabilitätstheorie. Freiburger Vorlesung gehalten im Wintersemester 1988/1989. Ausgearbeitet von Urs Künzi, Oktober 1991.